Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences et de Sciences de l'Ingénieur
Département du Tronc Commun Technologie

Polycopie

Physique 4 : Mécanique Rationnelle

COURS et EXERCICES

(Unité Fondamentale-- Domaine Sciences et Technique – S3 Licence LMD)

Dr. KASSOUL Amar

Maître de Conférences "A"

Mai 2009

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : STATIQUE

Chapitre 2 : GÉOMÉTRIE DES MASSES

Chapitre 3 : CINÉMATIQUE

Chapitre 4 : CINETIQUE

Chapitre 5 : DYNAMIQUE

Notations

$\mathbf{f_s}$	Coefficient de frottement de glissement,
$\mathbf{f_k}$	Coefficient de frottement de glissement en mouvement.
$\mathbf{m}$	Masse d’un système matériel continu,
$\mathbf{E_C}$	Énergie cinétique
$\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$ et $\mathbf{F_z}$	Composantes de la force $\vec{\mathbf{F}}$ avec les axes x, y et z
$\mathbf{I_O}$	Matrice d’inertie par rapport au centre O
$\mathbf{I_{xx}}$, $\mathbf{I_{yy}}$ et $\mathbf{I_{zz}}$	Moments d’inertie par rapport aux axes x, y et z respectivement.
$\mathbf{I_{nt}}$, $\mathbf{I_{xy}}$, $\mathbf{I_{xz}}$ et $\mathbf{I_{yz}}$	Produit d’inertie par rapport à deux droites perpendiculaires
$\mathbf{I_\Delta}$	Moment d’inertie par rapport à une droite quelconque (Δ)
$\mathbf{P}$	Puissance d'une force $\vec{\mathbf{F}}$
$\mathbf{W}$	Travail accompli entre deux instants t_0 et t_1 est donc:
$\mathbf{R, r}$	Rayon
$\mathbf{R}\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Repère orthonormé lié au solide, où repère relatif.
$\mathbf{R_0}(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$	Repère fixe, où repère absolu
$\mathbf{S}$, $\mathbf{A_S}$	Surface d’un corps solide
$\mathbf{V}$, $\mathbf{V_y}$ et $\mathbf{V_x}$	Volume d’un corps solide,
$\vec{\mathbf{a}}$	Vecteur accélération de la particule (π).
$\vec{\mathbf{a}}_c(M)$	Vecteur accélération complémentaire où de Coriolis :
$\vec{\mathbf{a}}_e(M)$	Vecteur accélération d’entraînement
$\vec{\mathbf{a}}_m$	Vecteur accélération moyenne du mobile entre t et t+Δt
$\vec{\mathbf{a}}_{M/R_0}$	Vecteur accélération absolue
$\vec{\mathbf{a}}_r(M) = \vec{\mathbf{a}}_{M/R}$	Vecteur accélération relative
$\vec{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathbf{t}}$	Vecteur directeur unitaire d’une droite quelconque
$\vec{\mathbf{n}}^t$	Transposé du vecteur directeur unitaire $\vec{\mathbf{n}}$
$\vec{\mathbf{p}}$	Quantité de mouvement d'un système matériel
$\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{u}}$	Vecteur unitaire
$\vec{\mathbf{r}}$	Vecteur position
$\vec{\mathbf{r}}_x$, $\vec{\mathbf{r}}_y$ et $\vec{\mathbf{r}}_z$	Projections de $\vec{\mathbf{r}}$ sur les axes Ox, Oy et Oz.
$\vec{\mathbf{v}}$:	Vecteur vitesse instantané
$\vec{\mathbf{v}}_m$	Vecteur vitesse moyenne du mobile entre les deux instants
$\vec{\mathbf{D}}$	Quantité d'accélération élémentaire
$\vec{\mathbf{F}}$	Vecteur de la force
$\vec{\mathbf{F}}_{max}$, $\vec{\mathbf{F}}_s$	Force de frottement de repos où statique
$\vec{\mathbf{F}}_x$, $\vec{\mathbf{F}}_y$ et $\vec{\mathbf{F}}_z$	Projections de F sur les axes Ox, Oy et Oz.
$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{\mathbf{F}})$	Moment de la force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport au point O

$\vec{M}_{ox}(\vec{F})$	Moment par rapport a L'axe Ox
$\vec{N}$, $\vec{R}$	Réaction normale,
$\vec{P}$, $\vec{Q}$	Poids
$\vec{R}$	Résultante de plusieurs forces
$\vec{T}$	Tension d'une liaison flexible
$\vec{V}_e(M)$	Vecteur vitesse d'entraînement
$\vec{V}_{M/R_0}$	Vecteur vitesse absolue d'un point M
$\vec{V}_r(M) = \vec{V}_{M/R}$	Vecteur vitesse relative d'un point M du solide (S)
α , β	Angle
φ	Angle de frottement
ρ	Masse volumique d'un corps solide
σ	Densité surfacique d'un corps solide
λ	Densité linéique d'une ligne matérielle
θ	Angle de rotation
θ_x, θ_y et θ_z	Angles définissent la direction d'une force avec les axes x, y et z
ω où $\dot{\theta}$	Vitesse angulaire où Taux de rotation
$\vec{\sigma}_A$	Moment cinétique du système en un point A
$\vec{\delta}_A$	Moment dynamique en A
$\vec{\Omega}$	Vecteur taux de rotation instantané

AVANT PROPOS

Ce polycopié de la physique 4 intitulé mécanique rationnelle est une matière de l'unité fondamentale 3 du socle commun du domaine sciences et techniques. Elle s'adresse aux étudiants de troisième semestre licence nouveau régime (LMD). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné dans le département du tronc commun technologie de l'UHBC. Il est rédigé sous forme de cours détaillés, avec des applications résolus et des exercices supplémentaires non résolus. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide. Le contenu de ce polycopié est structuré en cinq chapitres. Après un rappel mathématique sur les vecteurs, le chapitre un traite la statique du solide. Il présente des notions fondamentales de la statique à savoir : le point matériel, le corps solide parfait, les forces, les moments, les torseurs des forces extérieures, les liaisons et les réactions. Ensuite, les opérations sur les forces, l'équilibre des solides en présence du frottement sont exposés. Enfin, dans ce chapitre plus dix (10) exercices résolus et vingt deux (22) exercices supplémentaires non résolus seront présentés. Le chapitre deux concerne les notions sur la masse, le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie ; leurs intérêts mécaniques apparaîtront dans l'étude de la cinétique et de la dynamique. Le chapitre trois aborde la cinématique des corps solides qui traite le mouvement mécanique uniquement du point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué le mouvement. A la fin de ce chapitre sept exercices résolus et cinq autres supplémentaires non résolus seront donnés. Le chapitre quatre sera réservé à la cinétique. Il traite les relations associant les grandeurs cinématiques et la répartition des masses. Ce chapitre, introduit de nouvelles grandeurs cinétiques telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique, la résultante dynamique, le moment dynamique et l'énergie cinétique. Enfin le dernier chapitre aborde la dynamique. Il est proposé pour étudier le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur ces corps. L'objectif principal de ce chapitre est l'étude des théorèmes généraux régissant la dynamique. Il sera terminé à la fin par quatre exercices résolus et plus de quatre autres supplémentaires non résolus.

INTRODUCTION

OBJET DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

La mécanique rationnelle ou théorique, est une science qui étudie le mouvement de la matière sous sa forme la plus simple. C'est une science qui traite des lois générales régissant le mouvement mécanique et l'état d'équilibre des corps ou des parties de corps matériels. Par mouvement de la matière, on entend tous les changements qui se produisent pendant les processus thermique, chimique, électromagnétique, intra-atomique et autres. La mécanique rationnelle se borne à considérer la forme la plus élémentaire du mouvement, à savoir : Le mouvement mécanique. Par mouvement mécanique, on entend le changement de position relative des corps matériels qui se produit dans le cours du temps. Puisque l'état d'équilibre (statique) n'est qu'un cas particulier du mouvement, la mécanique rationnelle se donne aussi comme objet l'étude de l'équilibre des corps matériels. La mécanique rationnelle utilise des simplifications et des abstractions utiles, qui seront introduites pour examiner la question sur le plan théorique et de dégager la solution par les moyens les plus faciles.

Le présent cours a pour objet la mécanique classique, c'est à dire une mécanique fondée sur des lois connues dont les premiers énoncés remontent à Galilée (1564-1642) et à Newton (1643-1727). Vers la fin du 19eme siècle et au début du 20eme siècle, les chercheurs ont constaté que les lois de la mécanique classique cessent d'être applicables au mouvement des particules microscopiques et des corps dés que leurs vitesses deviennent proches de celle de la vitesse de la lumière. Le début du 20eme siècle marque l'apparition de la mécanique relativiste, qui a pour base la théorie de la relativité développée par A. Einstein (1879-1955). Cette théorie a précisé les limites de la validité des lois de la mécanique classique en établissant des relations quantitatives rigoureuses entre l'espace, le temps, la masse et l'énergie.

MÉTHODES DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

Comme les autres sciences de la nature, la mécanique rationnelle utilise beaucoup les abstractions. La méthode des abstractions, jointe à la généralisation des résultats de l'observation immédiate, de la production et de l'expérience, permet de dégager quelques concepts premiers qui se posent en axiomes. Tous les développements de la mécanique classique se déduisent de ces axiomes par voie de raisonnement logique et de calcul mathématique.

LES GRANDES DIVISIONS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

La mécanique rationnelle se divise en trois grandes parties :

La statique qui traite l'équilibre des corps matériels et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire.

La cinématique étudie le mouvement des corps matériels du point de vue géométrique, c.à.d sans tenir compte des causes qui engendrent le mouvement.

La dynamique se propose d'étudier le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur les corps.

NOTIONS MATHÉMATIQUES

1. Vecteur libre

L'espace métrique tridimensionnel d'Euclide de la géométrie classique est une représentation mathématique de l'espace physique où se meuvent les systèmes matériels ; on notera $\mathbf{E_3}$.

Les éléments de $\mathbf{E_3}$ sont des points. A un couple ordonné de points **(P, Q)** de $\mathbf{E_3}$, correspond un élément $\vec{\mathbf{v}}$ d'un espace vectoriel Euclidien :

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \rightarrow \vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$$

Il existe une infinité de points **(P, Q)** correspond au même vecteur. Ces vecteurs sont appelés vecteurs libres.

2. Produit scalaire

Pour un couple $(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2)$ de vecteurs de $\mathbf{E_3}$, on peut correspondre un nombre réel appelé produit scalaire de $\vec{\mathbf{v}}_1$ par $\vec{\mathbf{v}}_2$ et noté $\vec{\mathbf{v}}_1.\vec{\mathbf{v}}_2$. Il s'écrit :

$$\vec{\mathbf{v}}_1.\vec{\mathbf{v}}_2 = \left\|\vec{\mathbf{v}}_1\right\|\left\|\vec{\mathbf{v}}_2\right\|\cos\left(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2\right)$$

- On note $\vec{\mathbf{v}}^2 = \vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{v}}$ et on appelle $\left\|\vec{\mathbf{v}}\right\|$, module de $\vec{\mathbf{v}}$.

- Un vecteur est unitaire si son module est égal à 1.

3. Base

On appelle base de $\mathbf{E_3}$ un ensemble de trois vecteurs $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$ tels que tout vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{E_3}$ soit d'une manière et une seule une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3$.

La base $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ est orthonormée si et seulement si $\vec{\mathbf{u}}_i.\vec{\mathbf{u}}_j = \mathbf{0}$

Pour une base orthonormée de $\mathbf{E_3}$, on peut écrire :

$$\forall\ \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{E_3} : \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\vec{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{v}_2\vec{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{v}_3\vec{\mathbf{u}}_3 = \sum_{\mathbf{i}=1} \mathbf{v}_i\vec{\mathbf{u}}_i$$

On dit que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ sont les composantes de $\vec{\mathbf{v}}$ dans la base orthonormé $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$. Les vecteurs $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ constituent une base orthonormée ; $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ sont les projections orthogonales de $\vec{\mathbf{v}}$ sur les 3 vecteurs de base, telles que :

$$\mathbf{v}_i = \vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{e}}_i = \left\|\vec{\mathbf{v}}\right\|\cos\left(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_i\right)$$

4. Produit Vectoriel

4.1. Définition – Propriétés

Soient $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ trois vecteurs quelconques de l'espace vectoriel à trois dimensions qui sont rapportés à une base ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) orthonormée et directe.

Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ s'écrit :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

-Notons que, si $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{x}$, nous aurons $\vec{v} \perp \vec{x}$ et $\vec{w} \perp \vec{x}$

-Le produit vectoriel est déterminé autrement :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \left(\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\vec{v}, \vec{w}) \right) \vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$, dirigé perpendiculairement à $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

4.2. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{v} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{x}\right)$ est exprimé par la relation suivante :

$$\vec{v} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{x}\right) = \left(\vec{x} . \vec{v}\right)\vec{w} - \left(\vec{w} . \vec{v}\right)\vec{x}$$

4.3. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs est écrit par $\vec{v} . \left(\vec{w} \wedge \vec{x}\right)$, comme, on peut l'exprimé par

$$\vec{v} . \left(\vec{w} \wedge \vec{x}\right) = \vec{x} . \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \vec{w} . \left(\vec{x} \wedge \vec{v}\right)$$

4.4. Division vectorielle

Si $\vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, on dit que $\vec{x}$ est le résultat de la division vectorielle $\vec{w}$ par $\vec{v}$ $\left(\dfrac{\vec{w}}{\vec{v}} \right)$.

S'il existe un réel positif λ, le résultat de la division s'écrit :

$$\vec{x} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} + \lambda \vec{v}$$

5. Vecteur lié et Système Vectoriel

5.1. Vecteur lié

Un vecteur lié est un objet géométrique caractérisé par un vecteur libre $\vec{v}$ et un point **P :** $(P, \vec{v})$**.**

La droite issue de P ayant $\vec{v}$ pour vecteur directeur est le support du vecteur lié $(P, \vec{v})$. Cette droite est aussi appelée axe $P\vec{v}$.

En mécanique, les forces sont des exemples de vecteurs liés.

5.2. Moment d'un vecteur lié

Le moment d'un vecteur lié $(P, \vec{v})$ par rapport à un point **O** est exprimé par :

$$\vec{M}_O(P, \vec{v}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}$$

$\vec{M}_O(P, \vec{v})$ est un vecteur libre fonction du point **O**.

Le moment d'un vecteur lié $(P, \vec{v})$ par rapport à un axe (Δ) est :

$$\vec{M}_\Delta(P, \vec{v}) = \left(\vec{M}_o(P, \vec{v})\right)\vec{u}$$

O est un point quelconque de l'axe (Δ) et $\vec{u}$ est le vecteur directeur de l'axe (Δ).

5.3. Système vectoriel

Un système vectoriel **(S)** est un ensemble de **n** vecteurs liés. On écrit symboliquement :

$$(S) = \sum_i \left(P_i, \vec{v}_i\right)$$

Un tel système n'admet de somme géométrique que si les vecteurs sont concourants. En effet, l'addition $(P_1, \vec{v}_1) + (P_2, \vec{v}_2) + ...$ n'a pas de sens.

Par définition, on appelle résultante (ou somme) de **(S)** le vecteur libre $\vec{R}$ tel que :

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + ... + \vec{v}_n = \sum_{i=1} \vec{v}_i$$

5.4. Moment d'un système vectoriel

Le moment d'un système vectoriel **(S)** par rapport à un point **O** est le vecteur libre fonction du point **O** :

$$\vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{v}_i$$

On démontre que, lors d'un changement d'origine, on a la relation :

$$\vec{M}_{O'}(S) = \vec{M}_O(S) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}(S)$$

Cette relation définit un champ de vecteurs dit champ de moment ou champ de vecteurs antisymétrique.

6. Torseur

6.1. Définition

Le torseur $[\tau]$ d'un système vectoriel **(S)**, est formé :

- de sa résultante $\vec{R}$ (Vecteur libre défini en 5.3)

- d'un champ antisymétrique $\vec{M}$ fonction du point appelé moment (défini en 5.4).

Sa représentation en un point O est notée :

$$[\tau]_O = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \\ \vec{M}_O \end{pmatrix}$$

Quelque soit le point d'application, la résultante du torseur ne varie pas. Cependant, le moment dépend du point auquel il est exprimé.

La propriété la plus importante des torseurs est la règle de transport des moments (ou distribution des moments) qui caractérise un champ des vecteurs antisymétrique.

6.2. Propriété des torseurs

Soit : $[\tau]_{O1} = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \\ \vec{M}_{O1} \end{pmatrix}$ et $[\tau]_{O2} = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \\ \vec{M}_{O2} \end{pmatrix}$

On a alors les propriétés suivantes :

6.2.1. Égalité

Deux torseurs sont égaux si :

$$[\tau]_{O1} = [\tau]_{O2} \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_{O1} = \vec{M}_{O2}$$

6.2.2. Somme

La résultante et le moment de la somme de deux torseurs sont respectivement la somme des deux résultantes et la somme des deux moments (exprimés en même point).

$$[\tau]_O = [\tau]_{O1} + [\tau]_{O2} \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2}$$

6.2.3. Multiplication par un scalaire

La multiplication d'un torseur par un scalaire est égale à :

$$\lambda[\tau]_O = \begin{pmatrix} \lambda\vec{R} \\ \\ \lambda\vec{M}_O \end{pmatrix}$$

6.2.4. Torseur nul

Un torseur est nul si et seulement si sa résultante et son moment sont nuls.

$$[\tau]_O = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0} \ \text{ et } \ \vec{M}_O = \vec{0}$$

Si un torseur est nul en un point, alors il est nul en tout point.

6.2.5. Produit scalaire de deux torseurs

Le produit scalaire de deux torseurs $[\tau]_A$ et $[\tau]_B$ est donné par :

$$[\tau]_A . [\tau]_B = \begin{pmatrix} \vec{R}_A \\ \\ \vec{M}_A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{R}_B \\ \\ \vec{M}_B \end{pmatrix} = \vec{R}_A . \vec{M}_B + \vec{R}_B . \vec{M}_A$$

7. Dérivation d'un vecteur par un opérateur donné

Soit la fonction variable en fonction du temps :

$$\vec{W}(t) = x_0(t)\vec{x}_0 + y_0(t)\vec{y}_0 + z_0(t)\vec{z}_0$$

exprimée dans le repère fixe $\mathbf{R_0}$ (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$).

- la dérivée de cette fonction vectorielle dans le temps est :

$$\frac{d\vec{W}(t)}{dt} = \vec{W}'(t)$$

-la dérivée du produit d'une fonction variable et une fonction vectorielle dans le temps t est :

$$\frac{d\left(f\vec{W}\right)}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{W} + f\frac{d\vec{W}}{dt}$$

- la dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dans le temps t est :

$$\frac{d\left(\vec{U}.\vec{V}\right)}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt}\vec{V} + \vec{U}\frac{d\vec{V}}{dt}$$

- la dérivée du produit vectorielle de deux fonctions dans le temps t est :

$$\frac{d\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right)}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}$$

- La dérivée par rapport au repère fixe R_0 de $\overrightarrow{W}(t)$ exprimée dans R_0 (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) est :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \dot{x}_0(t)\vec{x}_0 + \dot{y}_0(t)\vec{y}_0 + \dot{z}_0(t)\vec{z}_0$$

- La dérivée par rapport au repère fixe R_0 (O_o, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{W}(t)$ exprimée dans le repère mobile $R\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tels que :

$$\overrightarrow{W}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

En appliquant les règles de dérivation d'un vecteur :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{x} + \dot{y}(t)\vec{y} + \dot{z}(t)\vec{z} + x\frac{d^{R_0}\vec{x}}{dt} + y\frac{d^{R_0}\vec{y}}{dt} + z\frac{d^{R_0}\vec{z}}{dt}$$

D'après la formule de la base mobile :

$$\frac{d^{R_0}\vec{x}}{dt} = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{x}$$

$$\frac{d^{R_0}\vec{y}}{dt} = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{y}$$

$$\frac{d^{R_0}\vec{z}}{dt} = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{z}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}_{R/R_0}$ est appelé vecteur taux de rotation du repère $R\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par rapport au repère R_0.

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{W}(t)}{dt} + x(t)\frac{d^{R_0}\vec{x}}{dt} + y(t)\frac{d^{R_0}\vec{y}}{dt} + z(t)\frac{d^{R_0}\vec{z}}{dt}$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{W}(t)}{dt} + x(t)\left(\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{x}\right) + y(t)\left(\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{y}\right) + z(t)\left(\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{z}\right)$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \left(x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}\right)$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{W}(t)$$

C'est la dérivée de la fonction vectorielle $\overrightarrow{W}(t)$ exprimée dans le repère mobile $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par rapport au repère fixe R_0 (O_o, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$)

Exercices

1. On considère deux vecteurs :

$$\vec{V}_1 = -6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

Calculer:
- leurs longueurs (modules)
- leur produit scalaire
- le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$
- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires

2. Montrer que si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont perpendiculaires entre eux, on a :

$$\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| = \left\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right\|$$

La réciproque est elle vraie?

3. Dans un repère orthonormé (ox, oy), on donne le point Q tel que le module $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = a$ et l'angle $\left(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{Ox}\right) = \alpha$ et le point P tel que le module $\left|\overrightarrow{OP}\right| = b$ et l'angle $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{Ox}\right) = \beta$.
A l'aide du produit scalaire, trouver une relation trigonométrique entre les angles α et β.

4. Dans un repère orthonormé direct, on définit les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1 = 0\vec{i} + 1\vec{j} + m\vec{k}\ ,\quad \vec{V}_2 = \vec{i} + n\vec{k}\ ,\quad \vec{V}_3 = \vec{i} + n\vec{j}$$

Déterminer le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$, qui sont respectivement équipollents à $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

5. Dans un repère orthonormé direct, on considère deux vecteurs:

$$\vec{V}_1 = m\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\ ,\quad \vec{V}_2 = m\vec{i} - m\vec{j} + \vec{k}$$

a- Déterminer **m** pour que $\vec{V}_1$ soit perpendiculaire à $\vec{V}_2$; dans ce cas calculer le module de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.
b- Déterminer m pour que $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ soit parallèle au vecteur $\vec{V}_3$ de composantes (-1, -1,0).

6. Démontrer que dans un triangle quelconque ABC on a:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B}$$

7. Pour un triangle ABC quelconque, prouver la relation :

$$\frac{\sin\hat{A}}{\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{\sin\hat{B}}{\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{\sin\hat{C}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

8. Montrer que les deux vecteurs $\vec{V}_1(1,3,-4)$ et $\vec{V}_2(1,5,4)$ sont perpendiculaires et calculer :

$$\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|,\quad \vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\ ,\ \|\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\|$$

9. Calculer le volume du parallélépipède obtenu à partir des vecteurs:

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+2y\vec{j}\ ,\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j}+3z\vec{k}\ ,\ \overrightarrow{OC}=2y\vec{j}$$

10. Etant donnés les points **A (1,0,0), B(0, 1, 0) et C(0, 0, 1).**
Calculer le volume du tétraèdre **OABC**.

11. Montrer que si les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont les côtés d'un parallélogramme, l'aire de ce dernier sera égale à $\|\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\|$

12. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ perpendiculaire aux vecteurs $\vec{V}_1=\vec{i}-4\vec{j}\ ,\ \vec{V}_2=\vec{i}-2\vec{k}$.

13. On considère les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1=x\vec{i}+y\vec{j}\ ,\ \vec{V}_2=y\vec{j}+z\vec{k},\ \vec{V}_3=x\vec{i}+z\vec{k}$$

Calculer le produit mixte : $\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3\right)$.

Chapitre 1 : STATIQUE

1.1. INTRODUCTION

La statique est une branche de la mécanique rationnelle qui traite l'équilibre des corps matériels par rapport à un système de référence supposé fixe, et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire. Dans ce chapitre on aborde des notions sur le point matériel, le corps solide parfait, la force, le moment d'une force et les torseurs des forces extérieures. Ensuite, on donne les conditions d'équilibres statiques, et les différents types des liaisons et de réactions. Enfin, on explique quelques opérations sur les forces concernant la réduction d'un système de forces à une résultante et la décomposition d'une force à plusieurs composantes.

1.2. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA STATIQUE

1.2.1. Point matériel

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

1.2.2. Corps solide parfait

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable) tant dans son ensemble qu'en chacune de ses parties.

1.2.3. Force

Par la force, on désigne en mécanique la mesure quantitative d'interaction mécanique des corps matériels. On appellera force l'action d'un corps sur un autre, se traduisant par une pression, une attraction, une répulsion…ect. L'action de la force sur le corps est déterminée par (Figure 1.1) :

- le point d'application : **A ;**
- le sens : **A→B**
- La direction où la ligne d'action : (Δ),
- le module où la valeur numérique : $\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$.

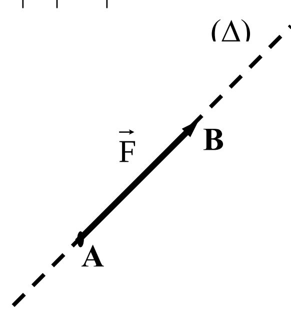


Figure 1.1. *Représentation vectorielle d'une force*

Les forces exercées sur un solide sont de deux types. Les forces extérieures qui sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné. Par contre, les forces intérieures sont les forces d'interaction, qui se développent entre les points matériels du solide donné et dont leur résultante est nulle.

1.2.4. Moment d'une force par rapport à un point

Soit une force $\vec{F}$ et un point O (Figure 1.2.). Menons par O un plan contenant $\vec{F}$. Abaissons de O une perpendiculaire OP sur la direction AB de la force $\vec{F}$. La longueur de la perpendiculaire est le bras de levier h de la force $\vec{F}$ par rapport au point O ; ce point s'appelle pôle.

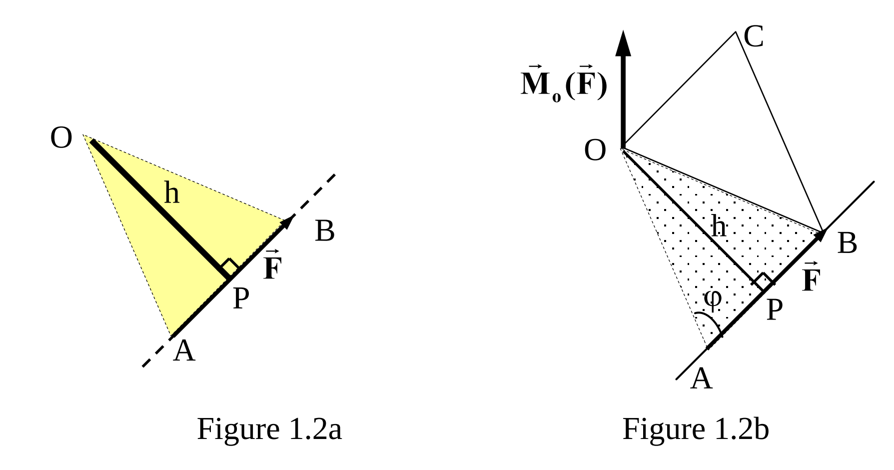


Figure 1.2a Figure 1.2b

Figure 1.2. *Moment d'une force par rapport à un point*

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est le produit du module F du vecteur de la force $\vec{F}$ par le bras de levier **h**, qui peut être affecté de signe positif ou négatif.

$$\mathbf{M_0(\vec{F}) = \pm F\,h} \tag{1.1}$$

$\mathbf{M_0(\vec{F}) \rangle 0}$ si la force fait tourner le plan dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.
$\mathbf{M_0(\vec{F}) \langle 0}$ si la force fait tourner le plan dans le sens des aiguilles d'une montre.

La valeur absolue du moment d'une force est le double de l'aire du triangle OAB construit sur la force $\vec{F}$ et le pôle O ou l'aire du parallélogramme OABC (Figure 1.2b).

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{\mathbf{F}})\right| = \mathbf{F\,h = 2\ S_{OAB}}$$

où :

$$\left|\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{\mathbf{F}})\right| = \mathbf{F\,h = F\ OA\sin\varphi = F\,r\sin\varphi} = \left\|\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}\right\|$$

d'où

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \left\|\vec{r} \wedge \vec{F}\right\| \tag{1.2}$$

Le vecteur moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ est égal en module à l’aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{r}$ où $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$. Il est perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs.

Ainsi, le vecteur moment d’une force $\vec{M}_O(\vec{F})$ par rapport à un point O est un vecteur lié en O, qui s’écrit :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{1.3}$$

1.3. TORSEURS DES FORCES EXTERIEURES

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$[F]_O = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_O} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Où

$\vec{F}$ Représente la résultante des forces extérieures appliquées $\vec{R}$;

$\overrightarrow{M_O}$ Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O.

Les efforts extérieurs à un système matériel **(S)** sont les efforts exercés sur **(S)** par d'autres systèmes extérieurs. Si **(S)** est soumis à des forces $\vec{F}_i$ et des couples $\vec{M}_i$ (Figure 1.3a), le torseur des efforts extérieurs exercés sur **(S)** en un point O, s'écrit :

$$[F_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \overrightarrow{M_O}(F_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

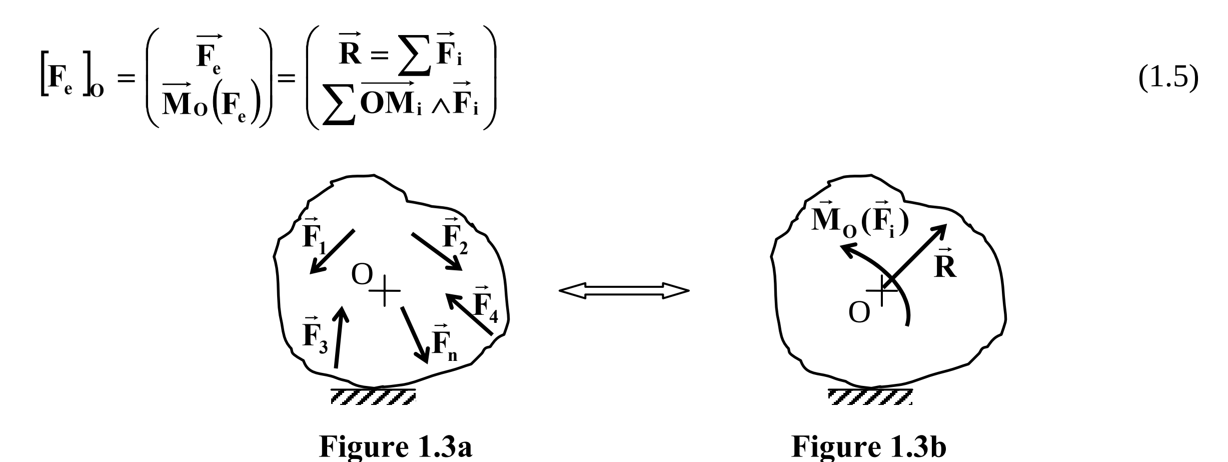


Figure 1.3a **Figure 1.3b**

1.4. CONDITION D’EQUILIBRE STATIQUE

1.4.1. Cas Général

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R). En conséquence, le torseur des forces extérieurs est en tout point O, où :

$$[F_e]_O = [0]_O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{F}_e \\ \overrightarrow{M_O}(F_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro, où :

$$\vec{R} = \vec{0}\,, \quad \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \qquad (1.7)$$

1.4.2 Condition d'équilibre analytique

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est la projection des éléments du torseur des forces extérieurs nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé **R(O, xyz)** permet d'obtenir en général six équations :

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

et trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{ix}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iy}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iz}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

-Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = 0 \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = 0 \end{cases}$$

· et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0}$$

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre **O**, le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

1.5. LES LIAISONS ET LES REACTIONS

1.5.1. Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction. Par exemple une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons, et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

1.5.2. Différents types des liaisons et de réactions

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, etc. Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est négligeable.

a) Liaison libre

Cette liaison est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile). Il existe six degrés de liberté et aucun effort de contact transmis (pas de réaction).

b) Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Le solide repose simplement sur une surface polie (horizontale, verticale où inclinée) Figure 1.4 (a, b) où sur le rouleau cylindrique Figure 1.4c. La réaction de la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{\mathbf{R}}$.

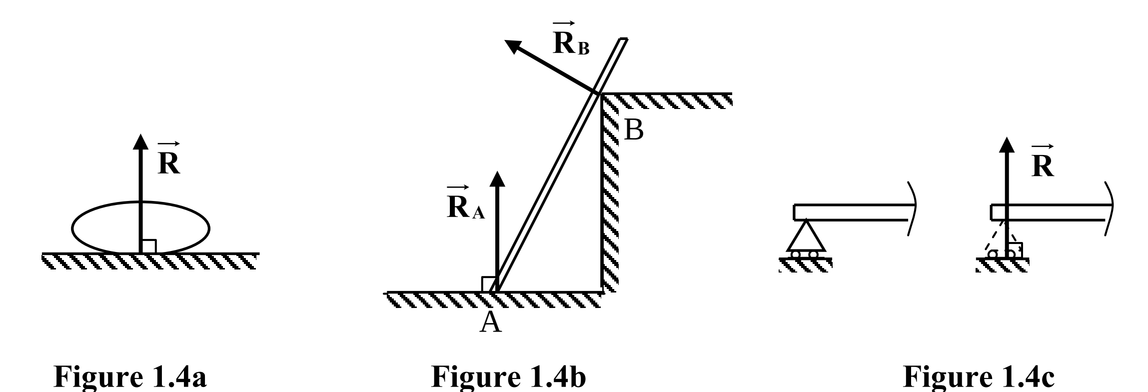


Figure 1.4a **Figure 1.4b** **Figure 1.4c**

c) Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par :
- un appui articulé (Figure 1.5a),
- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure 1.5b),
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure 1.5c).

Le module et la direction de la réaction $\vec{\mathbf{R}}$ dans son plan sont inconnus

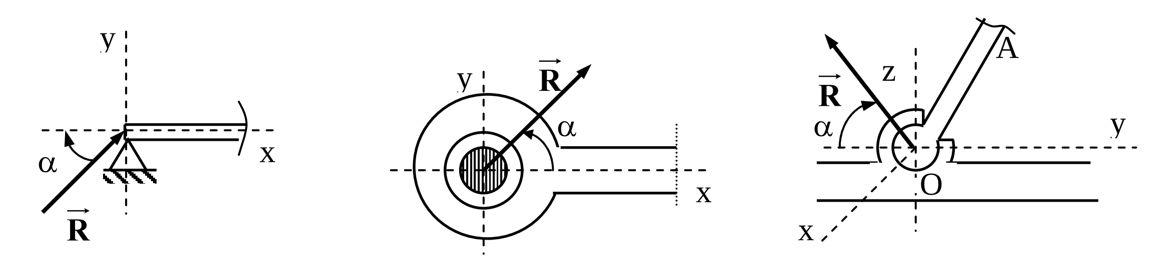


Figure 1.5a **Figure 1.5b** **Figure 1.5c**

d) Barres rigides

Les barres de poids négligeables peuvent servir comme des liaisons. Leur réaction sera dirigée suivant la longueur de celle-ci (Figure 1.6).

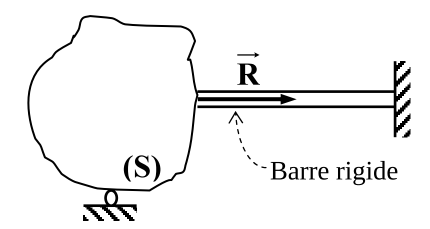


Figure 1.6

e) Liaison flexible (fil, corde, chaîne) (Figure 1.7)

La réaction $\vec{T}$ porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc…..).

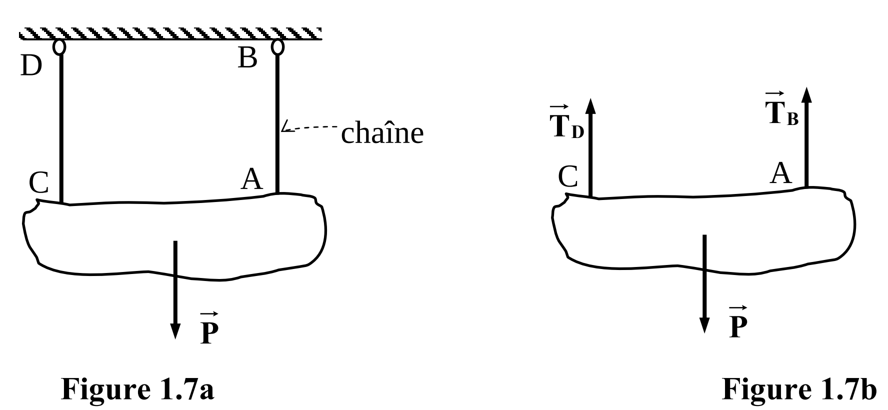


Figure 1.7a **Figure 1.7b**

f) Liaison Encastrement (Figure 1.8a)

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.

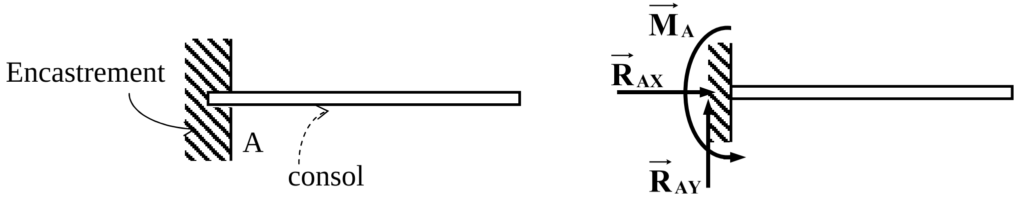


Figure 1.8a **Figure 1.8b**

1.5.3. Axiome des liaisons

Pour tout corps solide lié (Figure 1.9a), il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et de lui considérer comme un corps solide libre (Figure 1.9b) soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

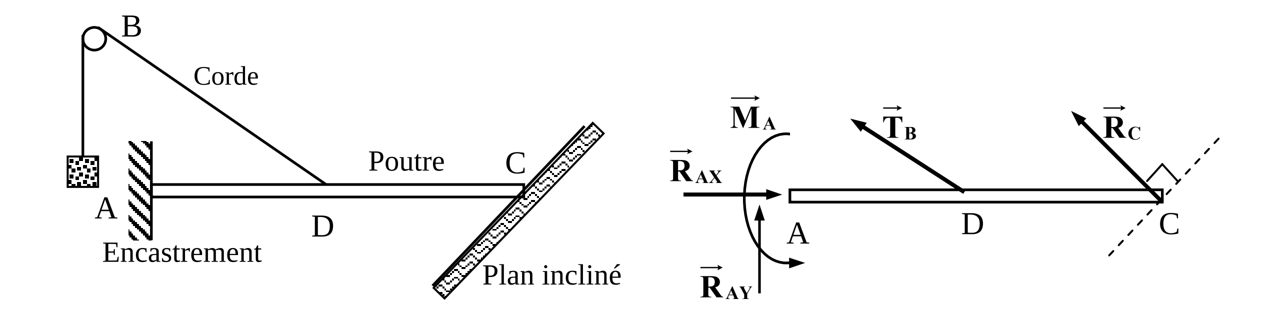


Figure 1.9a. *Corps solide lié* **Figure 1.9b.** *Corps solide libre*

1.6. QUELQUES OPERATIONS SUR LES FORCES

1.6.1. Résultante de deux forces concourantes

Soient deux forces $\vec{F}_1$ **et** $\vec{F}_2$ appliquées à un point O du solide (Figure 1.10a). Pour la détermination de leur résultante $\vec{R}$, on construit un parallélogramme sur $\vec{F}_1$ **et** $\vec{F}_2$ (Figure 1.10b). Le module et la direction de la résultante $\vec{R}$ sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (figure 1.10b- Règle du parallélogramme).

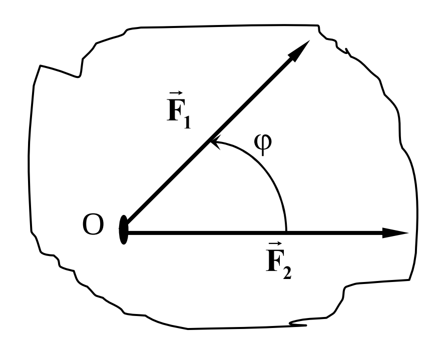


Figure 1.10a

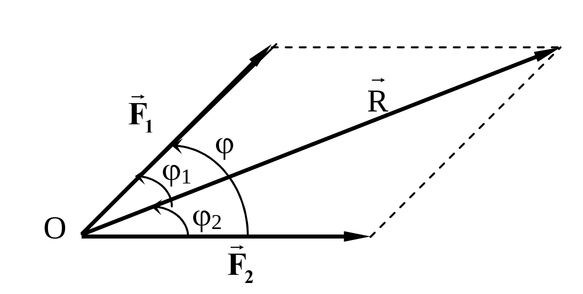


Figure 1.10b. *Parallélogramme de deux forces*

On s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (1.8)$$

et son module s'obtient :

$$\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\, F_1 F_2 \cos\varphi} \qquad (1.9)$$

et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi} \quad (1.10)$$

Les formules 1.8, 1.9 et 1.10 définissent le module, la direction et le sens de la résultante des deux forces appliquées au même point et faisant un angle φ entre elles.

1.6.2. Résultante de plusieurs forces concourantes

1.6.2.1. Méthode du parallélogramme des forces

On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun (Figure 1.11a), en faisant leur composition suivant la règle du parallélogramme. Composer les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, trouver leur résultante $\vec{R}_1$, puis composer cette dernière et la force $\vec{F}_3$, construire un parallélogramme sur $\vec{R}_1$ et $\vec{F}_3$, trouver la résultante $\vec{R}_2$, et ainsi de suite (figure 1.11b), jusqu'à obtention de la résultante finale $\vec{R}$ (en double lignes dans la figure 1.11b).

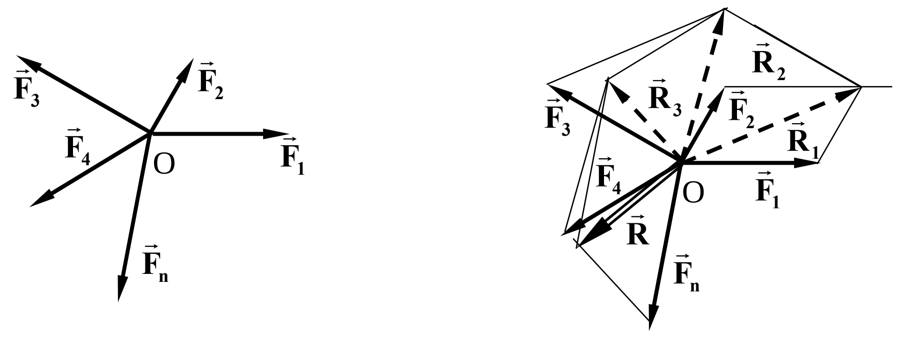


Figure 1.11a **Figure 1.11b**

1.6.2.2. Règle du polygone des forces

Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force. D'abord, on place l'origine du vecteur $\vec{F}_2$ à l'extrémité B de $\vec{F}_1$, puis de placer l'origine $\vec{F}_3$ à l'extrémité C de $\vec{F}_2$, etc…... En joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de $\vec{F}_n$, on obtient la résultante $\vec{R}$. La méthode porte le nom : **La règle du polygone des forces** (Figure 1.12).

La ligne brisée ABDCEF s'appelle polygone des forces et le segment AF, vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.

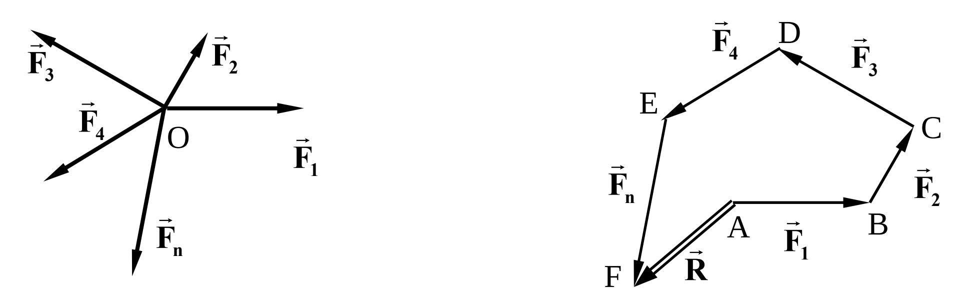


Figure 1.12a. *Système de forces concourantes* **Figure 1.12b.** *Polygone des forces*

S'il y a n forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …., $\vec{F}_n$ concourantes en O, leur résultante unique $\vec{R}$ est appliquée en O, et vaut la somme géométrique des vecteurs forces :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \tag{1.11}$$

1.6.2.3. Condition d'équilibre géométrique

Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.

1.6.2.4. Exemple d'application

Une bille homogène O de poids 12 KN, repose sur deux plans inclinés polis AB et BC perpendiculaires entre eux (Figure 1.13a).
Sachant que le plan BC fait un angle de 60° avec l'horizontal, déterminer les réactions des deux plans inclinés sur la bille.

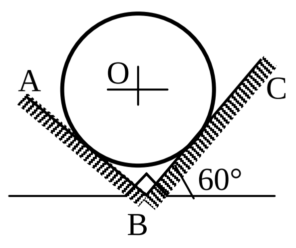


Figure 1.13a

Solution :

On supprime les liaisons de la bille et on les remplace par les réactions qui leur correspondent (Figure 1.13.b). La bille se trouve en équilibre sous l'action de trois forces (Figure 1.13.b) :

- Le poids dirigé verticalement vers le bas.
- La réaction N_A dirigée perpendiculairement au plan AB vers le centre O de la bille.
- La réaction N_C dirigée perpendiculairement au plan BC vers le centre O de la bille.

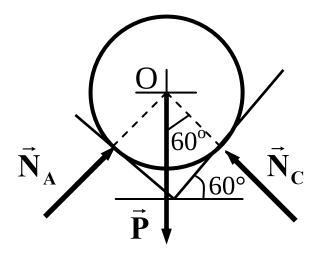


Figure 1.13.b

La condition d'équilibre géométrique est basée sur la règle du polygone des forces fermé.

Commençons par la construction du polygone des forces par la force connue P. D'un point arbitraire A_1, traçons le vecteur P (Figure 1.13c). Plaçons l'origine de la force suivante, par exemple N_A, à l'extrémité B_1 du vecteur de la force $\vec{P}$. Le module de $\vec{N}_A$ étant inconnu.

Puisque le solide est en équilibre, le triangle des forces P, N_A, N_C doit être fermé, d'où l'extrémité du vecteur de la force $\vec{N}_C$ doit se confondre avec l'origine du vecteur $\vec{P}$, A_1.

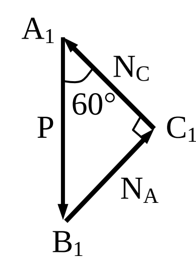


Figure 1.13.c

Appliquons le théorème des sinus sur le triangle $A_1B_1C_1$, on a :

$$\frac{\mathbf{P}}{\sin(\pi-(60°+30°))}=\frac{\mathbf{N_A}}{\sin 60°}=\frac{\mathbf{N_C}}{\sin 30°}$$

d'où :

$$\mathbf{N_A}=\frac{\sin 60°}{\sin(60°+30°)}\mathbf{P}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{P}=\mathbf{10{,}4\ KN}$$

$$\mathbf{N_C}=\frac{\sin 30°}{\sin(60°+30°)}\mathbf{P}=\frac{1}{2}\mathbf{P}=\mathbf{6\ KN}$$

1.6.3. Décomposition géométrique d'une force

1.6.3.1. Décomposition suivant deux directions

Décomposer une force revient à trouver les forces, appelées composantes, qui sont appliquées au même point, et produiront un effet équivalent à celui de la fore décomposée.

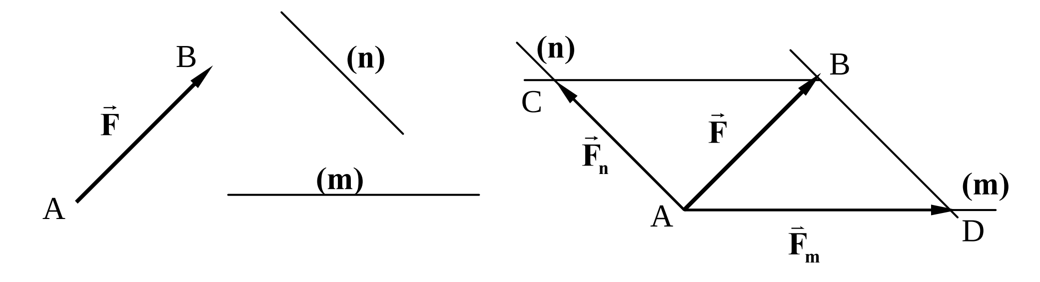


Figure 1.15a **Figure 1.15b** **Figure 1.15c**

La décomposition de la force $\vec{F}$ est valable lorsque les directions **(m)** et **(n)** des composantes cherchées (figure 1.15b) sont connues. Pour déterminer ces composantes, il suffit de mener par le point d'application A de la force $\vec{F}$ et par l'extrémité B de $\vec{F}$ deux droites parallèles à **(m)** et **(n)** : les points d'intersections définissent un parallélogramme

ADBC dans lequel la force $\vec{F}$ est la diagonale et les cotés AD et AC sont les composantes $\vec{F}_m$ et $\vec{F}_n$ (figure 1.15.c). Soit :

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n$$

1.6.3.2. Décomposition suivant trois directions

On peut décomposer une force d'une façon unique, suivant trois directions arbitraires non parallèles à un plan (figure 1.16.a). La solution conduit à un parallélépipède dont les arêtes ont les directions données et dont la diagonale AB est constituée par la force décomposée. La force $\vec{F}$ est égale à la somme des composantes cherchées et sera écrite :

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n + \vec{F}_p$$

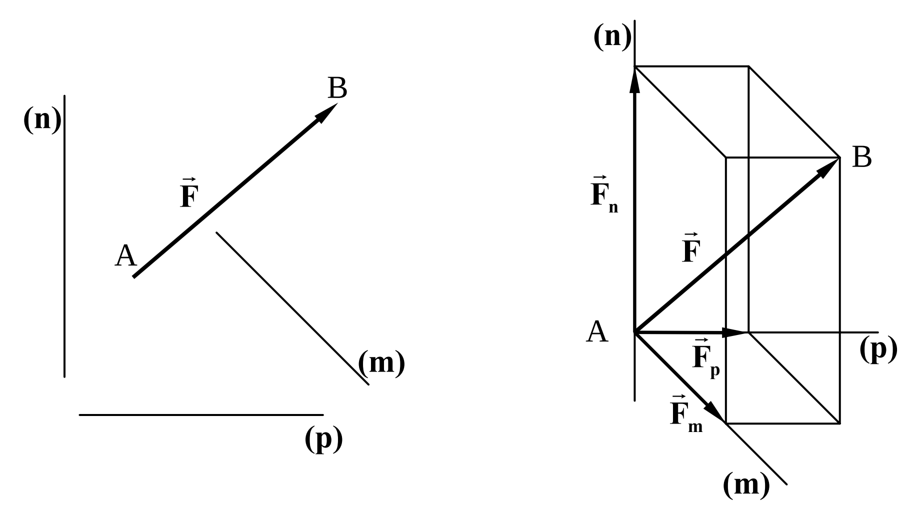


Figure 1.16a **Figure 1.16b**

La force $\vec{F}$ fait les angles θ_x, θ_y, θ_z respectivement avec les axes x, y, et z du système de coordonnées cartésiennes orthogonales Oxyz (figure 1.17). Pour décomposer $\vec{F}$ suivant les trois axes, construisons un parallélépipède dans lequel $\vec{F}$ sera une diagonale.

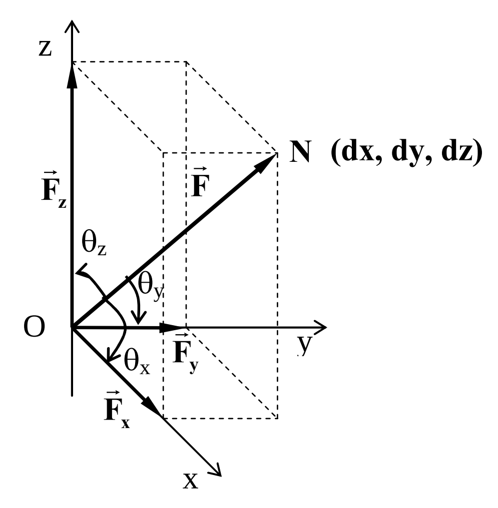


Figure 1.17

Le vecteur de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{x} + F_y\vec{y} + F_z\vec{z}$$

tel que F_x, F_y et F_z sont les composantes de la force $\vec{F}$ et dont les modules sont :

$$F_x = \|\vec{F}\|\cos\theta_x \quad , \quad F_y = \|\vec{F}\|\cos\theta_y \quad , \quad F_z = \|\vec{F}\|\cos\theta_z$$

D'où le module de la force $\vec{F}$:

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Les cosinus directeurs s'obtiennent :

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{\|\vec{F}\|} \quad , \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{\|\vec{F}\|} \quad , \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{\|\vec{F}\|}$$

Le module de la force $\vec{F}$, peut s'exprimer autrement, en utilisant les cosinus directeurs :

$$\|\vec{F}\| = \frac{F_x}{\cos\theta_x} = \frac{F_y}{\cos\theta_y} = \frac{F_z}{\cos\theta_z} \qquad (1.12)$$

1.6.3.3. Décomposition d'une force si un point de leur ligne d'action est connu

Si le point N de coordonnées **dx, dy** et **dz** appartenant à la ligne d'action de la force $\vec{F}$ est connu (Figure 1.17). Le vecteur $\overrightarrow{ON}$ forme les angles θ_x, θ_y et θ_z avec les axes x, y et z et **d** son module, nous pouvons écrire :

$$dx = d\cos\theta_x \quad , \quad dy = d\cos\theta_y \, , \quad dz = d\cos\theta_z$$

Il vient :

$$\|\overrightarrow{ON}\| = d = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Comme, on peut l'exprimer par la relation ; en introduisant les cosinus directeurs :

$$d = \frac{dx}{\cos\theta_x} = \frac{dy}{\cos\theta_y} = \frac{dz}{\cos\theta_z} \qquad (1.13)$$

Divisons membre à membre les relations (1.12) et (1.13), nous obtenons :

$$\frac{F}{d} = \frac{F_x}{dx} = \frac{F_y}{dy} = \frac{F_z}{dz} \qquad (1.14)$$

1.6.4. Décomposition analytique d'une force

Considérons la force $\vec{F}$ appliquée à l'origine O du système de coordonnées orthogonales x , y , z. Pour définir la direction de $\vec{F}$, nous traçons le plan vertical OBAC contenant $\vec{F}$, tel qu'indique la figure 1.18a.

Le plan OBAC contient l'axe vertical z, l'orientation de ce plan peut être définie par l'angle φ qu'il forme avec l'axe y dans le plan (x, y), tandis que l'orientation de la force $\vec{\mathbf{F}}$ dans le plan OBAC est donnée par l'angle θ_z qu'elle fait avec l'axe z.

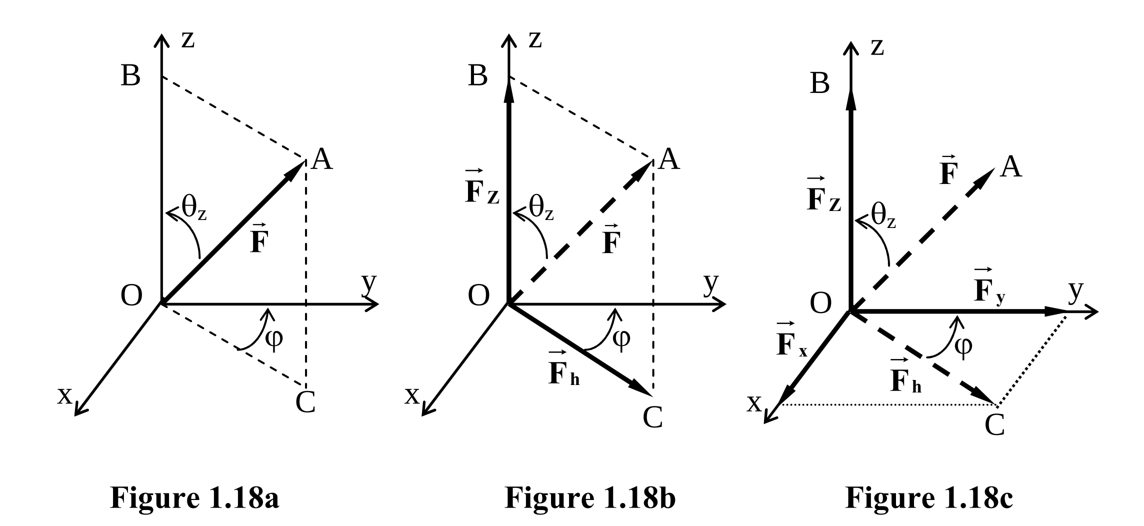


Figure 1.18a **Figure 1.18b** **Figure 1.18c**

Nous décomposons d'abord la force $\vec{F}$ en ces composantes $\vec{\mathbf{F}}_z$ et $\vec{\mathbf{F}}_h$. Cette dernière (F_h) étant contenue en plan (x, y) (Figure 1.18b). Les composantes scalaires de $\vec{\mathbf{F}}$ sont alors :

$$\mathbf{F_z = F \cos \theta_z} \qquad \mathbf{F_h = F \sin \theta_z}$$

Ensuite, la composante $\vec{\mathbf{F}}_h$ peut se décomposer, en $\vec{\mathbf{F}}_x$ et $\vec{\mathbf{F}}_y$ suivant les directions x et y. nous aurons alors les composantes scalaires (Figure 1.18c) :

$$\mathbf{F_x = F_h \sin \varphi = F \sin \theta_z \sin \varphi}$$

$$\mathbf{F_y = F_h \cos \varphi = F \sin \theta_z \cos \varphi} \qquad (1.15)$$

Exemple d'application

L'angle entre le hauban du tribord AB et le mât du bateau est de 15^0 (figure 1.19a). La tension dans le hauban est égale à 6 KN, calculer :

- les composantes de la force exercée par le hauban au point A,

- les angles θ_x, θ_y, et θ_z qui définissent la direction de cette force.

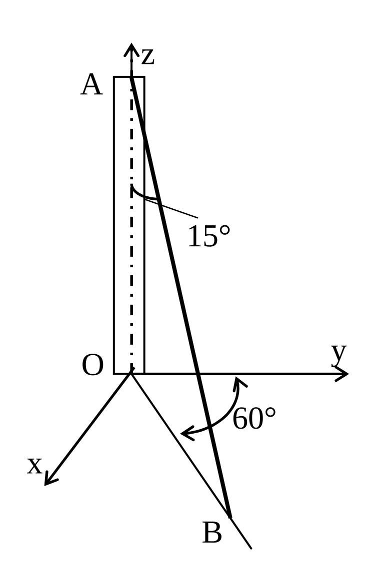


Figure 1.19a **Figure 1.19b**

a- Les projections de la tension $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}}$ appliquée au point **A** sont :

$$\mathbf{T_{Bz} = -T_B \cos 15°}$$

$$\mathbf{T_{Bh} = T_B \sin 15°}$$

Et, les projections de T_{Bh}, dans le plan (x, y) sont :

$$\mathbf{T_{Bx} = T_{Bh} \sin 60° = T_B \sin 15° \sin 60°}$$

$$\mathbf{T_{By} = T_{Bh} \cos 60° = T_B \sin 15° \cos 60°}$$

D'où, les composantes de la tension $\vec{T}_B$ sur les axes sont :

$$\mathbf{T_{Bx} = T_B \sin 15° \sin 60° = 1.34\ KN}$$

$$\mathbf{T_{By} = T_B \sin 15° \cos 60° = 0.78\ KN}$$

$$\mathbf{T_{Bz} = -T_B \cos 15° = -5.79\ KN}$$

b- les angles θ_x, θ_y, et θ_z qui définissent la direction de la tension $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}}$ sont déterminés par la relation :

$$\mathbf{T_B = \frac{T_{Bx}}{\cos\theta_x} = \frac{T_{By}}{\cos\theta_y} = \frac{T_{Bz}}{\cos\theta_z}}$$

D'où

$$\mathbf{\cos\theta_x = \frac{T_{Bx}}{T_B} = 0.23, \quad \theta_x = 77°}$$

$$\mathbf{\cos\theta_y = \frac{T_{By}}{T_B} = 0.129, \quad \theta_y = 82.6°}$$

$$\mathbf{\cos\theta_z = \frac{T_{Bz}}{T_B} = -0.97, \quad \theta_z = 165°}$$

1.6.5. Cas général du moment d'une force

1.6.5.1 Moment d'une force par rapport à un axe

Considérons la force $\vec{F}$ dans le repère (Oxyz) (figure 1.20) et $\vec{r}$ le vecteur de position du point d'application de la force $\vec{F}$ à l'origine O. La force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{x} + F_y\vec{y} + F_z\vec{z}$$

Où $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ et $\vec{F}_z$ sont les projections de $\vec{F}$ sur les axes Ox, Oy et Oz.
Ainsi le vecteur de position $\vec{r}$ dans le même repère s'écrit :

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x\,\vec{x} + r_y\,\vec{y} + r_z\,\vec{z}$$

Où $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ et $\vec{r}_z$ sont les projections de $\vec{r}$ sur les axes Ox, Oy et Oz.

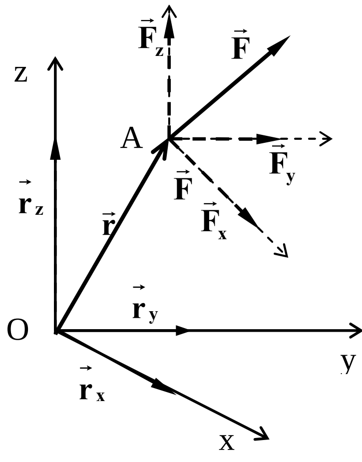


Figure 1.20

Le vecteur moment d'une force , $\vec{M}_O(\vec{F})$, par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \left(r_yF_z - r_zF_y\right)\vec{x} + \left(r_zF_x - r_xF_z\right)\vec{y} + \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\vec{z}$$

où

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F})\,\vec{x} + M_{oy}(\vec{F})\vec{y} + M_{oz}(\vec{F})\,\vec{z}$$

Les composantes du vecteur moment $\vec{M}_O(\vec{F})$, $M_{ox}(\vec{F})$, $M_{oy}(\vec{F})$ et $M_{oz}(\vec{F})$, sont les moments par rapport aux axes Ox, Oy et Oz respectivement dans le point O, et sont exprimés comme suivant :

$$\begin{aligned} \left(\vec{M}_o(\vec{F})\right)_{ox} &= M_{ox}(\vec{F}) = \left(r_yF_z - r_zF_y\right) \\ \left(\vec{M}_o(\vec{F})\right)_{oy} &= M_{oy}(\vec{F}) = \left(r_zF_x - r_xF_z\right) \\ \left(\vec{M}_o(\vec{F})\right)_{oz} &= M_{oz}(\vec{F}) = \left(r_xF_y - r_yF_x\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Les cas où le moment d'une force non nulle par rapport à un axe est égal à zéro sont les suivant :

a)- la direction de la force rencontre l'axe (h = 0)

b)- la force est parallèle à l'axe (la projection de $\vec{F}$ sur un plan h à l'axe sera nulle).

1.6.5.2 Théorème de VARIGNON

Si un système de forces plan admet une résultante unique $\vec{R}$, le moment de cette résultante par rapport à un point quelconque est égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces de ce système par rapport à ce même point (Figure 1.21).

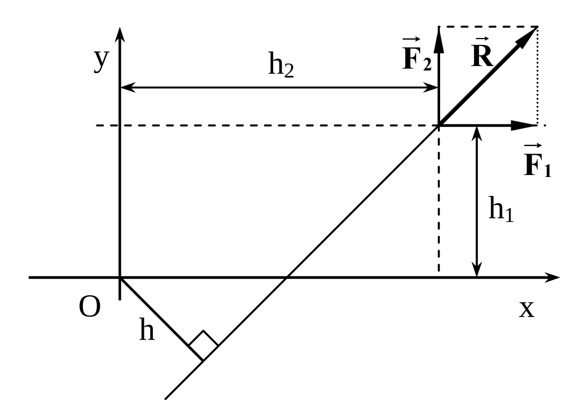


Figure 1.21

$$\vec{M}_o(\vec{R}) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) \qquad (1.18)$$

Soit :

$$\mathbf{R.h = F_1.h_1 + F_2.h_2}$$

1.6.5.3 Exemple d'application

Une roue C de 20 cm de diamètre et un engrenage D de 2cm de rayon sont emmanchés sur un arbre horizontal AB (Figure 1.22a). Le reste des dimensions est mentionné sur la figure. Une force verticale P = 10 KN est appliquée suivant la tangente à la roue C, une force horizontale Q de valeur inconnue est appliquée suivant la tangente à l'engrenage D. Déterminer la force Q et les réactions aux appuis A et B en position d'équilibre.

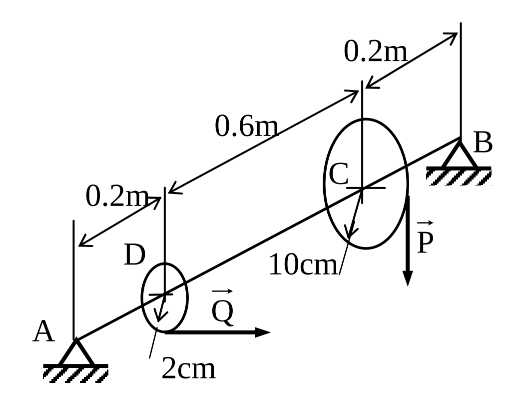


Figure 1.22a

Solution:

On supprime les liaisons dans la Figure 1.22a., et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 1.22b. D'après l'axiome des liaisons, la roue devient libre sous l'action du système de forces quelconque.

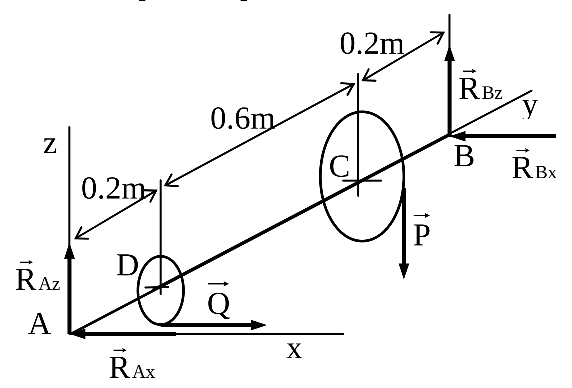


Figure 1.22b

Pour la détermination de la force Q et les réactions R_{Ax} , R_{Az}, R_{Bx} et R_{Bz}, on écrit la projection des éléments du torseur des forces extérieurs nul en A où en B :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

Où

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{By}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -R_{Ax} + Q - R_{Bx} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad R_{Az} - P + R_{Bz} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -P.0,8 + R_{Bz}.1 = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -Q.0,2 + R_{Bx}.1 = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad Q.\ 2 - P.\ 10 = 0 \qquad (5)$$

Où:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad P.0,2 - R_{Az}.1 = 0 \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad Q.0,8 - R_{Ax}.1 = 0 \qquad (7)$$

On déduit :

de (5) ⇒ $\mathbf{Q = 5P = 50\ KN}$

de (4) ⇒ $\mathbf{R_{Bx} = 0.2\ Q = 10\ KN}$

de (3) ⇒ $\mathbf{R_{Bz} = 0.8\ P = 8\ KN}$

de (6) ⇒ $\mathbf{R_{Az} = 0.2\ P = 2\ KN}$

et de (7) ⇒ $\mathbf{R_{Ax} = 0.8\ Q = 40\ KN}$

1.7. ÉQUILIBRE DES SOLIDES EN PRÉSENCE DU FROTTEMENT

1.7.1. Frottement de glissement

On appelle frottement de glissement la résistance qui s'oppose au glissement de deux solides à paroi rugueuse en contact.

1.7.1.1. Expérience

Soit un solide de poids $\vec{P}$ qui repose sur une surface horizontale. Appliquons à ce solide une force horizontale $\vec{T}$ (Figure 1.24a).

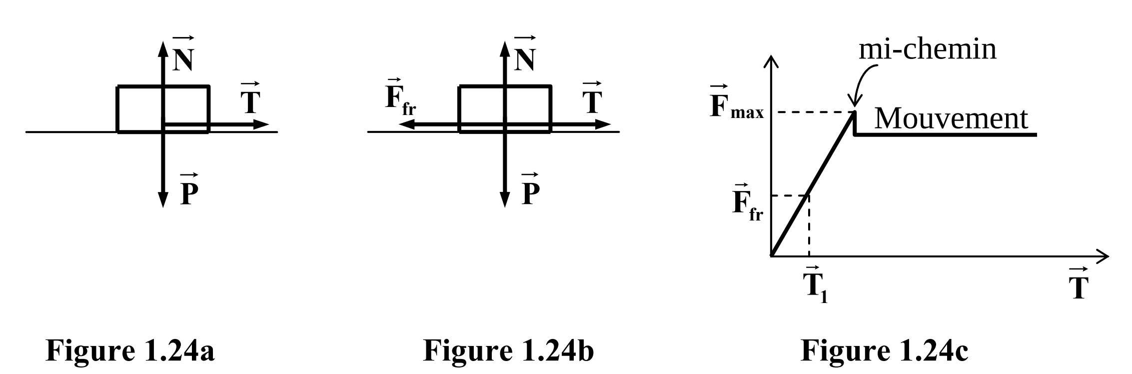


Figure 1.24a **Figure 1.24b** **Figure 1.24c**

1[er] cas : Surfaces en contact polies :

La force du poids $\vec{P}$ est équilibrée par la réaction $\vec{N}$. Dans ce cas, aucune force ne s'oppose à la force motrice $\vec{T}$ (Figure 1.24a). Le solide est en mouvement.

2[eme] cas : Surfaces en contact rugueuses :

La force du poids $\vec{P}$ est équilibrée par la réaction $\vec{N}$. Le solide peut rester au repos, dans ce cas, il existe une autre force qui s'oppose au mouvement du solide de même direction et de sens opposée à $\vec{T}$ (Figure 1.24b). On appellera cette force, force de frottement de glissement $\vec{F}_{fr}$.

Augmentons progressivement la force $\vec{T}$ (figure 1.24c). Tant que le solide reste au repos, la force $\vec{F}_{fr}$ équilibre à chaque instant la force motrice $\vec{T}$, dans ce cas la force $\vec{F}_{fr}$ augmente avec elle jusqu'à une valeur maximale $\mathbf{F_{max}}$ $(\mathbf{F_{fr} \leq F_{max}})$ où le corps solide est en mouvement. La force maximale $\vec{F}_{max}$ correspond au cas limite de l'équilibre du solide, c'est à dire à l'instant où celui-ci est à mi-chemin (dans la zone de transition) entre le repos et le mouvement.

1.7.1.2. Force de frottement statique

La force de frottement de glissement est une force résistante qui agit dans le plan tangent aux deux surfaces de contact dans le sens opposé à la force motrice et de direction parallèle aux surfaces de contact.

La force de frottement qui agit lorsque le corps se trouve avant le mouvement (immobile) s'appelle force de frottement de repos ou force de frottement statique.

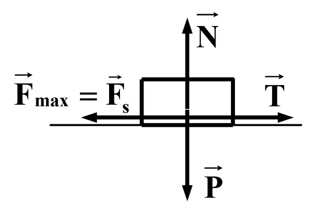


Figure 1.25

D'après la loi d'Amontons – Coulomb, la valeur maximale du module de la force de frottement de repos où statique $\vec{F}_{max}$ où $\vec{F}_s$ (Figure 1.25) est proportionnelle à la pression normale du solide sur la surface d'appui :

$$\vec{F}_{max} = f_s \vec{N} \tag{1.19}$$

Où f_s est le coefficient de frottement de glissement, sans dimension, qui est en fonction des matériaux des surfaces en contact et de l'état de ces surfaces.

Quelques valeurs du coefficient de frottement de glissement f_s pour quelques matériaux:

- Acier sur glace 0,027
- Acier sur acier 0,15
- Bronze sur fonte 0,16
- Cuir sur fonte 0,28

1.7.1.3. Force de frottement cinématique

La force de frottement qui agit quand un solide se déplace sur l'autre, est la force de frottement cinématique $\mathbf{F_k}$. Elle est aussi proportionnelle à la réaction normale :

$$\vec{F}_k = f_k \vec{N} \tag{1.20}$$

Où f_k est le coefficient de frottement de glissement en mouvement. Il est fonction de la vitesse de mouvement. Il reste toujours inférieur au coefficient de frottement au repos $(f_k < f_s)$

1.7.1.4. Exemple d'application

On applique une force F = 100 N sur un bloc solide de poids W = 300 N, placé sur un plan incliné (Figure 1.25). Le coefficient de frottement statique sur le plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, est f_s = 0.25 (figure 1.26a). Calculer la force de frottement requise pour maintenir l'équilibre et vérifier l'équilibre du bloc, si f_s = 0.4, qu'est ce que vous remarquez ?

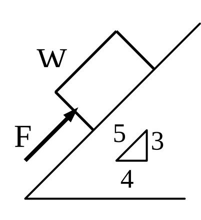


Figure 1.26a

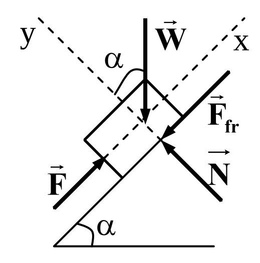


Figure 1.26b

Solution :

Commençons par le calcul du module de la force de frottement capable de maintenir l'équilibre du bloc. En supposant que F_{fr} est dirigée vers le bas et parallèle au plan incliné. Nous pouvons tracer le schéma du bloc isolé (Figure 1.26b) et écrire les équations d'équilibre :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F - W \sin\alpha - F_{fr} = 0} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N - W \cos\alpha = 0} \qquad (2)$$

Sachant que $\sin\alpha = 3/5$ et $\cos\alpha = 4/5$

On remplace F et W par leurs modules respectifs, on trouve après calcul :

F_{fr} = - 80 N où F_{fr} = 80 N dirigée vers le haut
Et N = 240N

La force requise pour maintenir l'équilibre est une force de 80 N, dirigée vers le haut parallèlement au plan incliné. Le bloc a donc tendance à descendre le plan incliné.

La force de frottement maximale :
La grandeur de la force de frottement maximale est donnée par :

$$\mathbf{F_{max} = f_s N ;}$$
$$\mathbf{F_{max} = 0.25(240N) = 60N}$$

Comme la valeur de la force de frottement requise pour maintenir l'équilibre est F_{fr} = 80N, plus grande que la valeur maximale possible F_{max} = 60N, l'équilibre ne pourra pas être maintenu et le bloc descendra le plan incliné.

Dans le cas où $f_s = 0.4$, la force de frottement maximale s'écrit :

$$\mathbf{F_{max} = 0.4(240N) = 96N}$$

Dans ce cas, $\mathbf{F_{fr} = 80N < F_{max} = 96N}$, donc le corps peut rester en équilibre.

1.7.2. Angle de frottement



Figure 1.27a **Figure 1.27b**

Lorsque le corps solide est au repos, la réaction totale d'une surface rugueuse $\vec{R}$, compte tenue du frottement, est déterminée en module et en direction par la diagonale du rectangle formé par la réaction normale $\vec{N}$ et la force de frottement $\vec{F}_{fr}$ (Figure 1.27a) :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{fr}$$

La direction de $\vec{R}$ fait un angle β avec $\vec{N}$ du coté opposé à $\vec{T}$. Dans ce cas, plus $\vec{T}$ est grand, plus la direction de $\vec{R}$ s'écarte de la normale. L'écart maximal est constaté lorsque $F_{fr} = F_{max}$. La valeur maximale de l'angle d'écart β s'appelle angle de frottement φ (figure 1.27b), et est exprimée par :

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \frac{f_s N}{N} = f_s \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg} f_s \qquad (1.21)$$

1.7.3. Frottement de roulement

Par frottement de roulement, on entend la résistance qui a lieu quand un solide roule sur un autre. Soit un rouleau cylindrique de poids $\vec{P}$, de rayon **R**, reposant sur une surface horizontale, et sollicité en son centre de gravité par une force motrice $\vec{T}$ (Figure 1.27a).

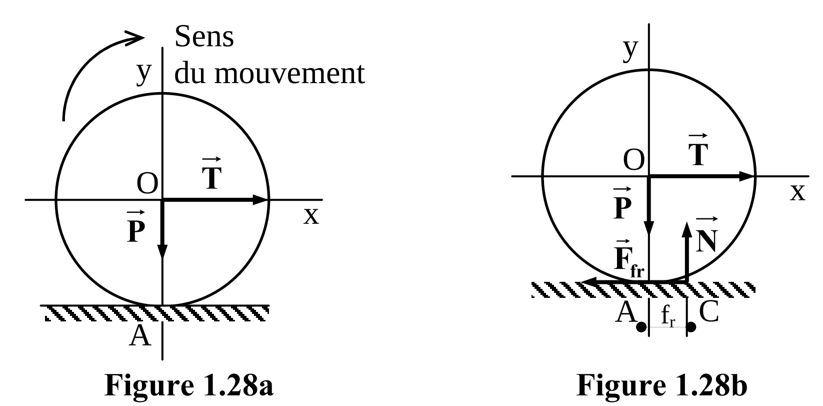


Figure 1.28a **Figure 1.28b**

La surface d'appui se déforme sous l'action du poids du rouleau, c'est-à-dire, le point d'application des réactions $\vec{N}$ et la force de frottement $\vec{F}_{fr}$ se déplace de A vers le point C (Figure 1.28b). Les équations d'équilibre du rouleau sont :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow T - F_{fr} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \mathbf{N - P = 0}$$

D'où :

$\mathbf{F_{fr} = T}$ **et** $\mathbf{N = P}$

Le couple **(F_{fr} , T)** tend à mettre le rouleau en mouvement, tandis que le couple **(N, P)** s'oppose au mouvement et tend à mettre le rouleau au repos. Ce dernier couple s'appelle moment de résistance au roulement, $\mathbf{m_r}$, il est égal au moment de la force N par rapport au point A.

$\mathbf{m_r = M_A(N)}$

$\sum \mathbf{M_A(F) = M_A(N) - T}\, R = \mathbf{0}$

D'où

$\mathbf{m_r = T}\, R$

A l'instant où le solide se met en mouvement, le moment résistant atteint sa valeur maximale. Les expériences montrent que cette valeur est proportionnelle à la réaction normale.

$\mathbf{(m_r)_{max} = f_r\, N}$ (1.22)

Le coefficient de proportionnalité f_r, dit coefficient de frottement de roulement, est mesuré en unité de longueur.

Au repos, on a :

$$\mathbf{m_r \leq (m_r)_{max}}$$

$$\mathbf{T}\, R \leq f_r.\mathbf{N}$$

D'où :

$$\mathbf{T \leq \frac{f_r}{R}\, N}$$

En général $\mathbf{\frac{f_r}{R}}$ est beaucoup plus petit que le coefficient de frottement de glissement f_s ; c'est pourquoi, quand le repos est perturbé, le rouleau se met à rouler sur la surface d'appui sans glisser sur cette dernière.

1.7.4. Frottement d'un câble sur une poulie

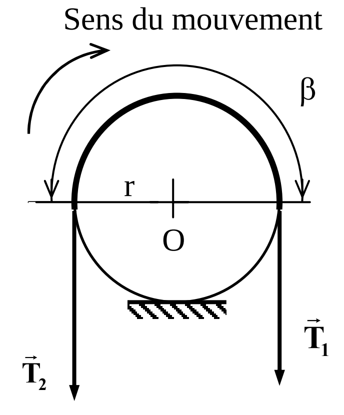


Figure 1.29

La relation qui lie les deux tensions T_1 et T_2 d'un câble sur une surface cylindrique rugueuse (Figure 1.29), s'écrit sous la forme :

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{f_s \beta} \qquad (1.23)$$

Où β est l'angle d'arc de contact du câble sur la surface cylindrique, f_s est le coefficient de frottement statique et $\mathbf{T_1}$ est toujours supérieure à $\mathbf{T_2}$ ($\mathbf{T_1 > T_2}$) selon le sens du mouvement.

La résultante de la force de frottement entre le câble et la surface cylindrique, s'écrit :

$$\mathbf{F = T_1 - T_2} \qquad (1.24)$$

EXERCICES RESOLUS

1.1. Un ballon d'air de poids P, reste en état d'équilibre à l'aide d'un câble BC (Figure 1.29a). Il est soumis à l'action d'une force verticale en haut Q, et la pression du vent horizontale F. Déterminer la tension au point B du câble ainsi que sa direction.

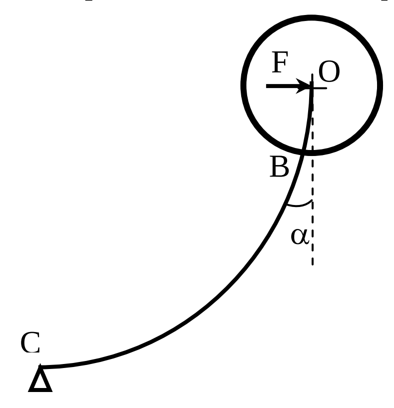


Figure 1.29a

Solution:

On supprime le câble BC et on le remplace par la tension correspondante $\vec{\mathbf{T}}$ (Figure 1.29b), ensuite, on représente les autres forces agissant sur le ballon d'air à savoir :

- le poids $\vec{\mathbf{P}}$ du ballon ;
- la pression du vent horizontale $\vec{\mathbf{F}}$;
- l'action de la force verticale $\vec{\mathbf{Q}}$ dirigée vers le haut.

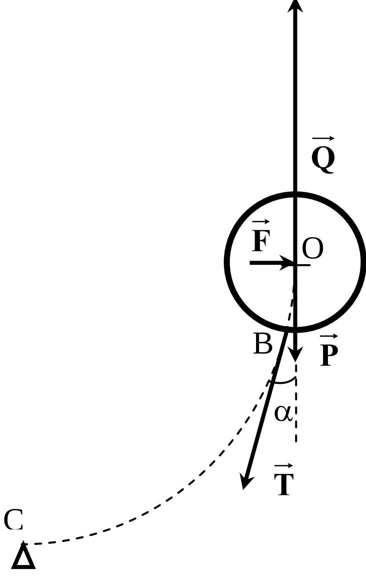


Figure 1.29b

1ere Méthode : Condition d'équilibre analytique

Pour la détermination de la tension $\vec{\mathbf{T}}$ au point B du câble ainsi que sa direction, on écrit le torseur des forces concourantes au centre O du ballon (Figure 1.29b). La condition

d'équilibre statique du ballon est le torseur nul au centre O. La projection des éléments de ce torseur nul, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad F - T\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad Q - P - T\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

On écrit la somme des carrés des équations (1) et (2), soit :

$$(1)^2 \Rightarrow (F)^2 = (T\sin\alpha)^2$$

+

$$(2)^2 \Rightarrow (Q-P)^2 = (T\cos\alpha)^2$$

D'où, le module de la tension **T** s'écrit :

$$T = \sqrt{F^2 + (Q-P)^2}$$

La direction de la tension $\vec{T}$ sera connue à partir de l'angle α qui s'obtient en divisant (1) par (2), soit :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{Q-P} \quad \text{où} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{F}{Q-P}$$

2ieme méthode : Méthode géométrique

La condition d'équilibre géométrique : on emploi la règle du polygone des forces fermé.
On construit le polygone des forces agissant sur le ballon (Figure 1.29b). On trace d'abord la force connue $\vec{P}$ dirigée vers le bas à partir du point O_1 et d'extrémité O_2. Du point O_2, on trace la force $\vec{Q}$ dirigée vers le haut d'extrémité O_3. Ensuite, on illustre la force horizontale $\vec{F}$ à partir de O_3 et d'extrémité O_4. Enfin, on ferme le polygone par la tension $\vec{T}$ dirigée en bas vers la gauche par un angle α inconnu du point O_4 vers O_1 (Figure 1.29c).

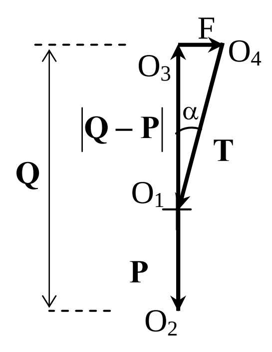


Figure 1.29c

Appliquons le théorème de Pythagore sur le triangle $O_1O_3O_4$ (Figure 1.29c), on obtient :

$$\mathbf{T^2 = F^2 + (Q - P)^2}$$

D'où :

$$\mathbf{T = \sqrt{F^2 + (Q - P)^2}}$$

Et l'angle α :

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Q - P}} \quad \text{où} \quad \alpha = \mathbf{arctg}\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Q - P}}$$

1.2. Une bille pleine homogène, de poids $\vec{P}$ et de rayon R, est maintenue en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par un câble inextensible AB qui fait un angle β avec la verticale (Figure 1.30a). Déterminer les réactions des liaisons sur la bille.

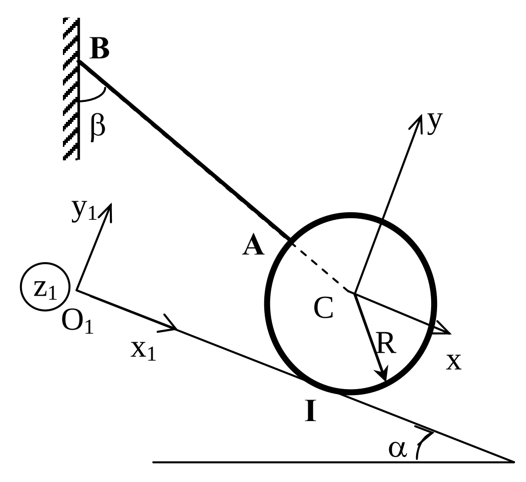


Figure 1.30a

Solution :

On remplace le câble AB par la tension $\vec{T}_B$ et le plan incliné par la réaction normale $\vec{N}$ (Figure 1.30b). D'après l'hypothèse des liaisons, la bille devient libre sous l'action du système de forces concourantes au centre C.

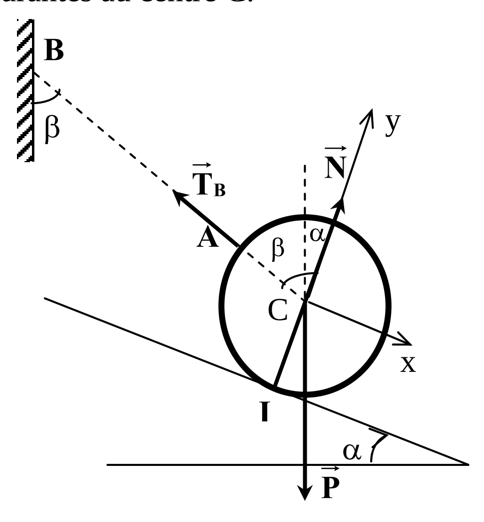


Figure 1.30b

1ere Méthode : Condition d'équilibre analytique

La projection des éléments du torseur nuls des forces extérieures au centre C, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow P\sin\alpha \ - T_B \sin(\alpha + \beta) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow N - P\cos\alpha - T_B \cos(\alpha + \beta) = 0 \qquad (2)$$

La résolution des deux équations donne :

$$T_B = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad N = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

2eme Méthode : Condition d'équilibre géométrique

Pour la construction du triangle des forces fermé, on commence par la force connue $\vec{P}$ dirigée verticalement vers le bas du point C_1 vers l'extrémité C_2. Ensuite, on trace la tension $\vec{T}_B$ du point C_2 avec un angle β avec la verticale, et enfin, on ferme le triangle avec la réaction $\vec{N}$ qui fait un angle α avec la verticale.

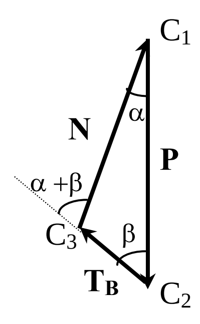


Figure 1.30c

Ecrivons le théorème des sinus du triangle des forces fermé $C_1C_2C_3$:

$$\frac{N}{\sin\beta} = \frac{T_B}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))}$$

D'où:

$$T_B = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad N = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

1.3. Le fardeau de poids $\vec{Q}$ est maintenu en équilibre au point C par le système représenté dans la Figure 1.31a. Déterminer les réactions dans les barres CA de longueur a, CB de

longueur b et la tension de la chaîne CD de longueur d. Les deux barres sont perpendiculaires entre elles et sont contenues dans un plan horizontal. (A.N : AC = a = 0.6m, BC = b = 0.8m, DC = d = 1.41m et **Q** = 100 KN.

OD =

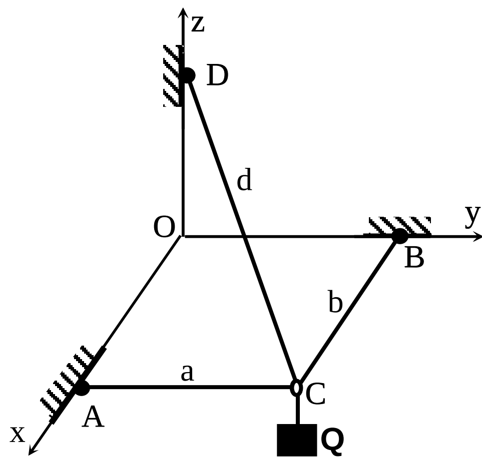


Figure 1.31a

Solution :

Pour la représentation des réactions dans les barres CA et CB et la tension dans le câble CD, on supprime les liaisons et on les remplace par les réactions qui leur correspondent (Figure 1.31b). La tension $\vec{T}_D$ fait un angle β avec la verticale et sa projection sur le plan l'horizontale (OACB), $T_D \sin\beta$ fait un angle α avec AC (AC//Oy) (Figure 1.31c).

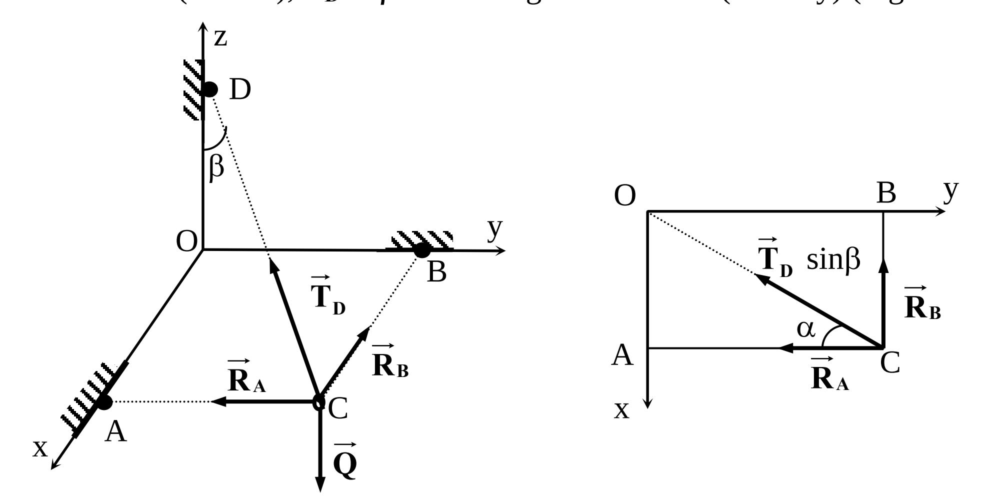


Figure 1.31b **Figure 1.31c**

Nous avons :

$$\sin\beta = \frac{OC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{d}, \quad \cos\beta = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{d^2 - (a^2 + b^2)}}{d}$$

Et

$$\sin\alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A fin de calculer les réactions R_A et R_B et la tension T_D, on écrit la projection des éléments du torseur des forces nuls au nœud C, soit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz}=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow -R_B - T_D\sin\beta\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow -R_A - T_D\sin\beta\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow -Q - T_D\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

La résolution de ces trois équations, donne :

$$T_D=\frac{Q}{\cos\beta}=\frac{d}{OD}Q$$

$$R_A=-\frac{a}{OD}Q$$

$$R_B=-\frac{b}{OD}Q$$

$$T_D = 1.41Q = 141\ KN$$

$$R_A = -0.6Q = -60\ KN$$

$$R_B = -0.8Q = -80\ KN$$

1.4. Déterminer les réactions des appuis de la poutre représentée dans la Figure 1.32a. Le poids propre de la poutre est supposé négligeable.

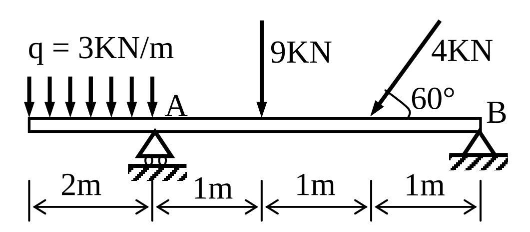


Figure 1.32a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 1.32a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 1.32b. D'après l'axiome des liaisons, la poutre devient libre sous l'action du système de forces en plan.

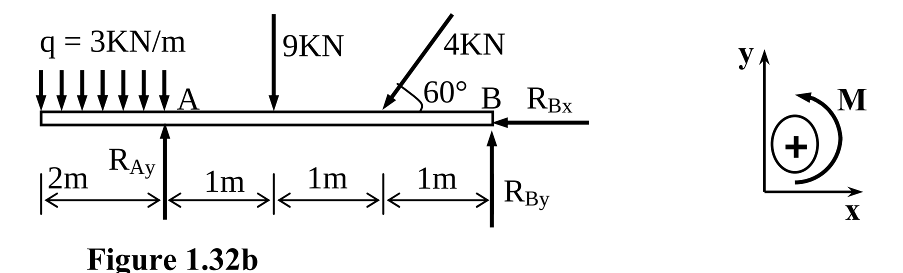


Figure 1.32b

Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Bx} et R_{By}, on écrit la projection des éléments du torseur des forces extérieurs en A :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad -R_{Bx}-4\cos 60° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad -3.2+R_{Ay}-9-4\sin 60° + R_{By} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad 3.2x1 - 9x1 - 4\sin 60° x2 + R_{By}x3 = 0 \qquad (3)$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$R_{Bx} = 2\ KN,\quad R_{By} = 3.31\ KN,\quad R_{Ay} = 15.15\ KN$$

1.5. Un arc en treillis repose en B sur une articulation fixe et en A sur un rouleau dont le plan d'appui fait un angle de 30° avec l'horizontale. Le poids propre de l'arc est P = 100KN. La résultante $\vec{F}$ des forces de pression du vent est égale à 20 KN, dirigée parallèlement à AB et appliquée à 4m au-dessus du point B (Figure 1.33a). Déterminer les réactions aux appuis.

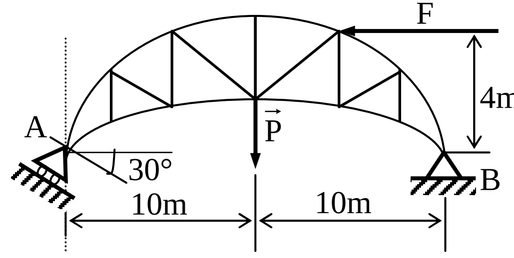


Figure 1.33a

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 1.33a par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 1.33b. D'après l'axiome des liaisons, l'arc en treillis devient libre sous l'action du système de forces en plan.

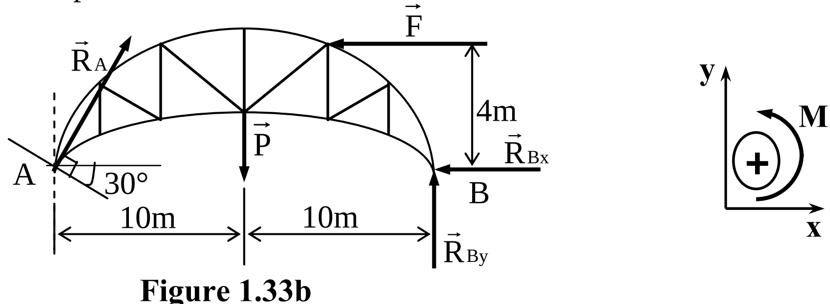


Figure 1.33b

Pour la détermination des réactions R_A, R_{Bx} et R_{By}, on écrit la projection des éléments du torseur nul des forces extérieurs en B, où :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_B(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; R_A \sin 30° - R_{Bx} - F = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; R_A \cos 30° + R_{By} - P = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_B(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow -R_A \cos 30° x20 + Px\,10 + Fx\,4 = 0 \qquad (3)$$

de (3) on obtient

20 $R_A$cos30°.= 10P + 4F $\Rightarrow$ **R_A = 62,4 KN**

Et de (1) on écrit

R_{Bx} = $R_A$sin30° - F $\Rightarrow$ **R_{Bx} = -11,18 KN**

Ainsi que de (2) on détermine

R_{By} = P - $R_A$cos30° $\Rightarrow$ **R_{By} = 46 KN**

1.6. Déterminer les réactions de l'encastrement A du portique (Figure 1.34a). Le poids propre du portique est négligeable et les données nécessaires sont illustrées sur la figure 1.34a.

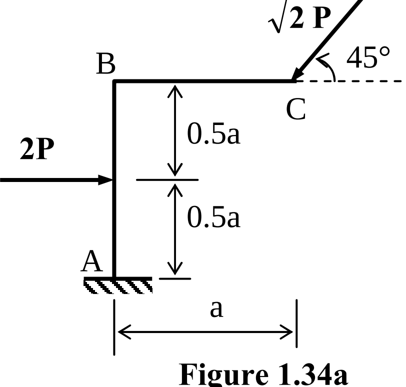


Figure 1.34a

Solution :

Pour la détermination des réactions de l'encastrement A du portique (Figure 1.34a), on supprime l'encastrement en A et on le remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 1.34b. Ensuite, on écrit la condition d'équilibre statique du portique isolé (Figure 1.34b), sous l'action d'un système de force en plan.

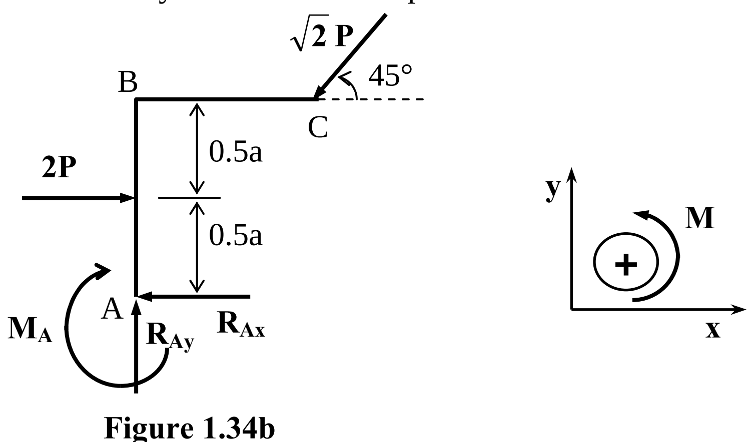


Figure 1.34b

La projection des éléments du torseur nul des forces extérieures dans le point A, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax}+2P-\sqrt{2}\,P\cos 45° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \Leftrightarrow R_{Ay}-\sqrt{2}\,P\sin 45° = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_A(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow -M_A-2P\,x\,0.5a+\sqrt{2}\,P\cos 45°\;x\,a-\sqrt{2}\,P\sin 45°\;x\,a=0 \qquad (3)$$

De l'équation (1), on obtient :

$\mathbf{R_{Ax} = P}$

Et de l'équation (2),
$\mathbf{R_{Ay} = P}$

De l'équation (3)

$\mathbf{M_A = -Pa}$

1.7. Déterminer les réactions des appuis de l'arc illustré dans la figure 1.35a. Le poids propre de l'arc est négligeable et les données nécessaires sont illustrées sur la Figure 1.35a.

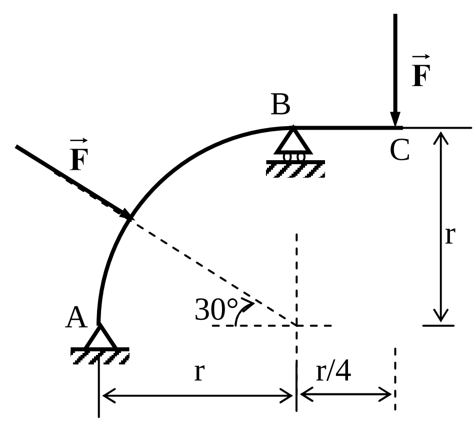


Figure 1.35a

Solution:

Pour la détermination des réactions de l'appui double en A et de l’appui simple en B de l’arc AC (Figure 1.35a), on supprime ces liaisons et on les remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 1.35b. Ensuite, on écrit la condition d'équilibre statique de l’arc isolé (Figure 1.35b), sous l'action d'un système de force en plan.

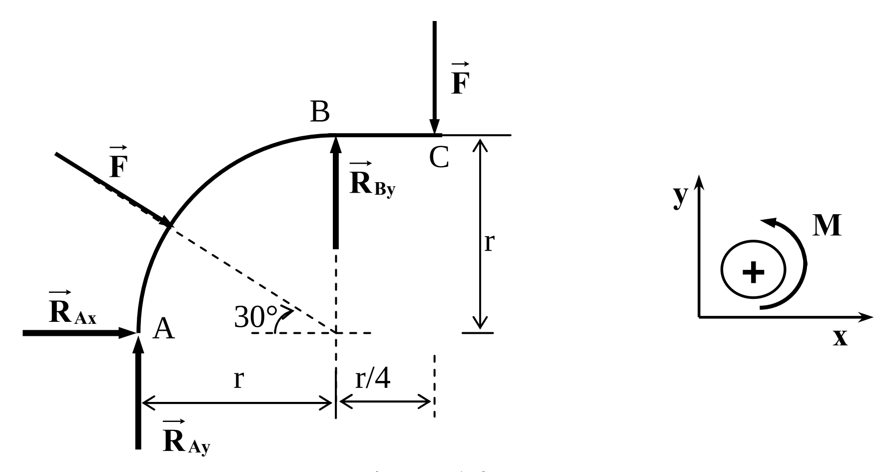


Figure 1.35b

La projection des éléments du torseur nul des forces extérieures au point A, de l'arc isolé dans la figure 1.35b, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_{i})=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax}+F\cos 30° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \Leftrightarrow R_{Ay}-F\sin 30°+R_{By}-F=0 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_{i})=\vec{0} \Leftrightarrow -F\sin 30° r(1-\cos 30°)-F\cos 30° r\sin 30°+R_{By}\, r- F\ 1.25r = 0 \qquad (3)$$

De l'équation (1)

$\mathbf{R_{Ax} = -0.87F}$

De l'équation (3), on obtient :

$\mathbf{R_{By} = 1.75\ F}$

Et de l'équation (2),

$\mathbf{R_{Ay} = -0.25F}$

1.8. Pour le système représenté dans la Figure 1.36a, déterminer le module de la force $\vec{F}$ et les réactions des appuis cylindriques en A et B ; sachant que le frottement dans les surfaces cylindriques C et D est négligeable, et nous avons : Q = 8 KN, r = 5 cm, AC = CB = 50 cm et AK = 40 cm.

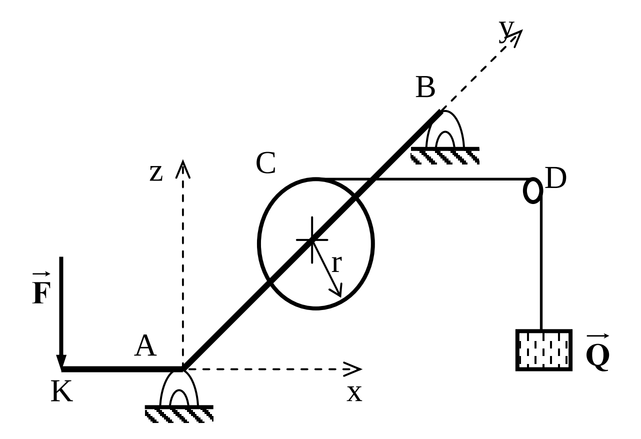


Figure 1.36a

Solution :

On supprime les liaisons du système représenté dans la Figure 1.36a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans les Figures 1.36b et 1.36c. D'après l'axiome des liaisons, le système (Figures 1.36b) devient libre sous l'action du système de forces quelconques.

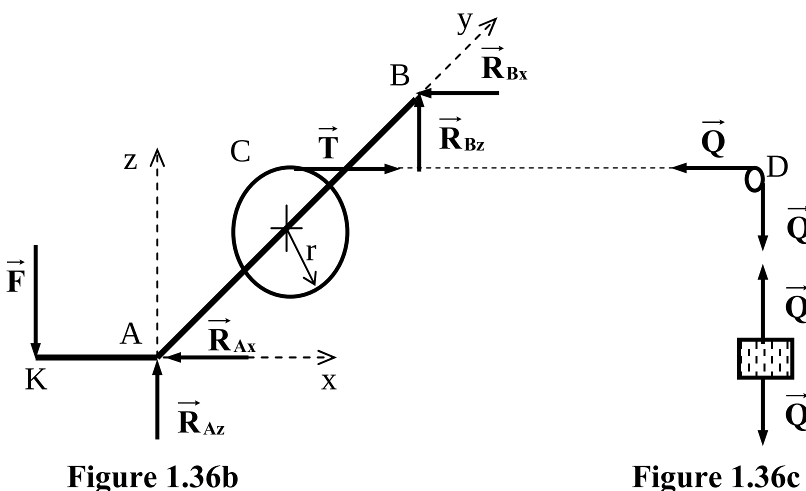


Figure 1.36b **Figure 1.36c**

Puisque le frottement dans la poulie D est négligeable, la tension dans le câble CD reste constante (Figure 1.36c), d'où :

$$\mathbf{T = Q = 8\ KN}$$

Pour la détermination du module de la force $\vec{F}$ et les réactions dans les appuis cylindriques en A et B, nous écrivons la condition d'équilibre statique du corps solide isolé (Figure 1.36b), sous l'action d'un système de forces quelconques. Cette condition est traduite par le torseur des forces extérieures nuls en A où B. La projection des éléments de ce torseur sur les axes s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

Où

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{By}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax} + Q - R_{Bx} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz} = \vec{0} \Leftrightarrow +R_{Az} - F + R_{Bz} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Bz} = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow F.KA - Q.r = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Bx}.AB - Q.AC = 0 \qquad (5)$$

Où

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Az}.AB + F.AB = 0 \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Bx}.AB - Q.BC = 0 \qquad (7)$$

De l'équation (3), on détermine : **F = 1 KN**

Et, de (4), on détermine : **R_{Bz} = 0 KN**

Et, de (5), on détermine : **R_{Bx} = 4 KN**

Ainsi, de (6), on détermine : **R_{AZ} = 1 KN**

De (7), on détermine : **R_{Ax} = 4 KN**

La vérification des équations (2) et (3), nous confirme les résultats obtenus.

1.9. Un couvercle rectangulaire, articulé en A et B, conserve l'équilibre horizontal à l'aide d'une barre rigide FG de poids négligeable (Figure 1.37a). Sachant que le poids du couvercle est P = 180 N, sa longueur CD = 2.3m et sa largeur CE = 0.75m, la distance EF = 1.5m et AC = BE = 0.15m, déterminer les réactions des liaisons.

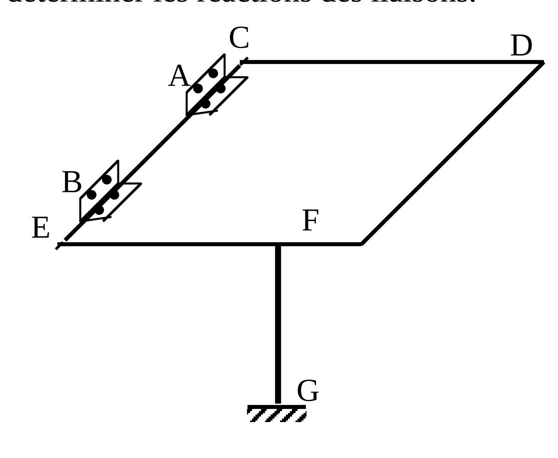


Figure 1.37a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 1.37a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 1.37b.

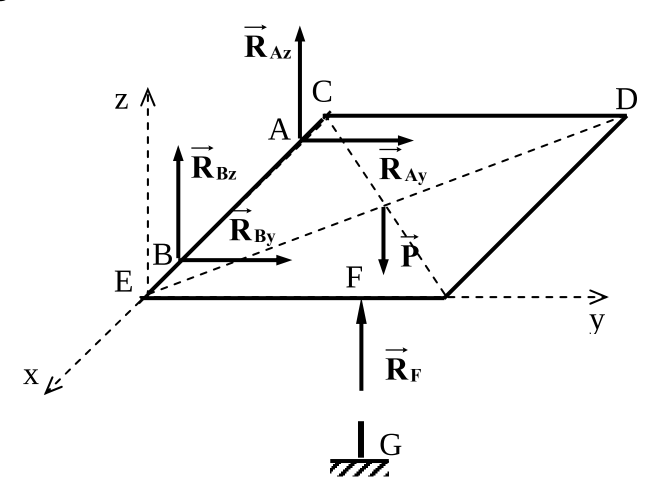


Figure 1.37b

Pour la détermination des réactions dans les appuis cylindriques en A et B, nous écrivons la condition d'équilibre statique du couvercle rectangulaire isolé (Figure 1.37b). La projection des éléments du torseur des forces extérieures nul dans le point **A** (Figure1.37b), s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz}=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ax}(\vec{F}_i)=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ay}(\vec{F}_i)=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Az}(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \Leftrightarrow \quad +R_{Ay}\ +R_{By}\ =0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz}=\vec{0} \Leftrightarrow \quad +R_{Az}\ +R_{Bz}+R_F-P\ =0 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ax}(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow -P\frac{CD}{2}+R_F\,EF\ =0 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Ay}(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow -R_{BZ}\ AB+P\frac{AB}{2}\ -R_F AE=0 \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{Az}(\vec{F}_i)=\vec{0} \Leftrightarrow R_{By}\ AB\ =0 \qquad (6)$$

La résolution de ces équations donne :

$$R_{Ay}=0,\quad R_{Az}=136\ N,\quad R_{By}=0,\quad R_{Bz}=-94\ N,\quad R_F=138\ N$$

1.10. Une barre homogène AB de poids P et de longueur L, appuyée en A sur une plate forme rugueuse et l'extrémité B est fixée par le câble BC, inclinée d'un angle de 45° avec l'horizontale (Figure 1.38a). Sachant que le coefficient de frottement de la barre avec l'horizontale est f_s. Déterminer l'angle φ que fait le câble BC avec l'horizontale permettant la barre à glisser vers le point D.

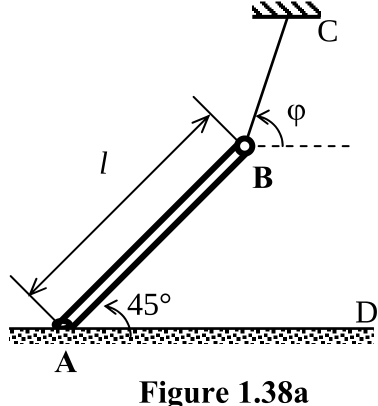


Figure 1.38a

Solution:

On supprime les liaisons dans la figure 1.38a et on les remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 1.38b.

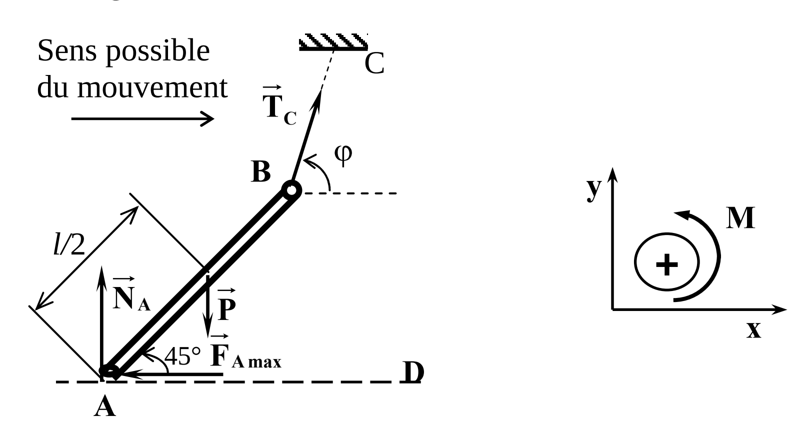


Figure 1.38b

La barre AB se trouve à mi-chemin entre le repos et le mouvement, donc la résultante de la force de frottement sera maximale, et elle s'écrit :

$$\mathbf{F_{Amax} = f_s\, N_A}$$

Où $\mathbf{N_A}$ est la réaction de l'horizontale sur la barre AB. La force $\mathbf{F_{Amax}}$ sera dirigée dans le sens opposé du mouvement.

Pour la détermination de l'angle φ à partir duquel la barre va glisser, on écrit la condition d'équilibre statique de la barre isolé (Figure 1.38b), sous l'action d'un système de force en plan. La projection des éléments du torseur des forces extérieures nul dans le point A où B, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \text{ où } \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \; -F_{A,max} + T_C\cos\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \; N_A + T_C\sin\varphi - P = 0 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -P\,\frac{1}{2}l\cos 45° + T_C\sin\varphi\; l\cos 45° - T_C\cos\varphi\; l\sin 45° = 0 \qquad (3)$$

où

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -N_A\, l\cos 45° - f_s N_A\; l\sin 45° + P\,\frac{1}{2}l\cos 45° = 0 \qquad (4)$$

On remplace $\mathbf{F_{Amax}}$ dans l'équation (1), on obtient :

$$f_s N_A = T_C\cos\varphi \qquad (5)$$

Ensuite, de l'équation (3), on obtient la tension dans le câble BC :

$$T_C = \frac{P}{2(\sin\varphi - \cos\varphi)}$$

Et de l'équation (4), on aura la réaction normale $\mathbf{N_A}$:

$$N_A = \frac{P}{2(1+f_s)}$$

On remplace T_C et N_A dans l'équation (1), on trouve :

$$tg\,\varphi = 2 + \frac{1}{f_s}$$

Donc, l'angle φ que fait le câble BC avec l'horizontale à partir duquel la barre va glisser vers le point **D**, est :

$$\varphi = arctg\left(2 + \frac{1}{f_s}\right)$$

EXERCICES SUPLEMENTAIRES

1.11. Une bille homogène de poids P = 100 N, conserve son équilibre en plan par deux chaînes AB et AC comme le montre la figure 1.39. La ligne d'action de la chaîne AB est inclinée avec l'horizontale d'un angle de 50°.

- Déterminer les tensions dans les deux chaînes AB et AC.

S.A. : $\mathbf{T_B = 1.53P = 153N, \; T_C = P = 100N}$

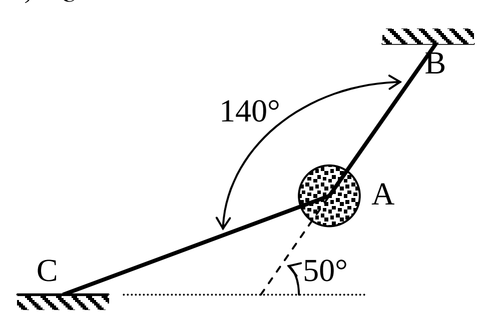
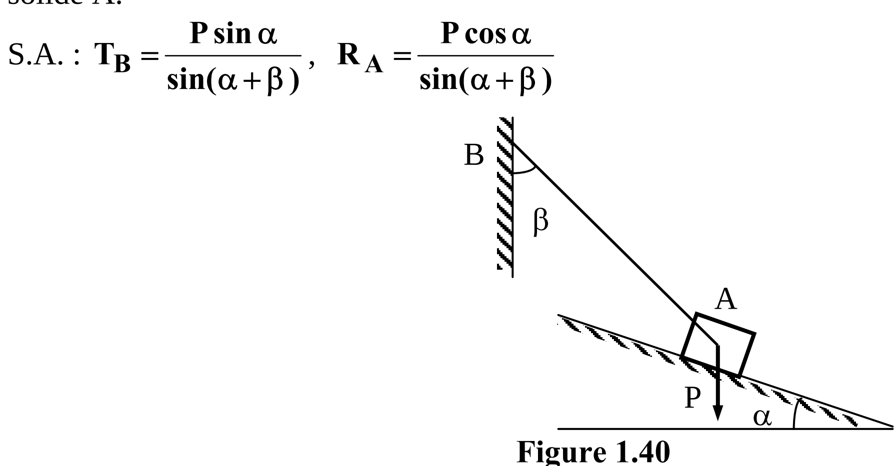


Figure 1.39

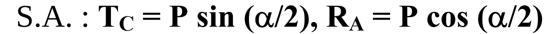
1.12. Un corps solide A de poids $\vec{\mathbf{P}}$ repose sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontal. Le corps solide étant lié avec un câble AB qui fait un angle β avec la verticale (figure 1.40). Déterminer la tension dans le câble AB et la réaction du plan incliné sur le solide A.



S.A. : $\mathbf{T_B = \dfrac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}, \quad \mathbf{R_A = \dfrac{P \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$

Figure 1.40

1.13. Une barre homogène AB de poids $\vec{\mathbf{P}}$, articulée en A avec le mur vertical et faisant un angle α à l'aide d'un câble BC avec ce même plan (Figure 1.41). Sachant que AB = AC, déterminer la tension dans le câble et la réaction dans l'articulation A.



S.A. : $\mathbf{T_C = P \sin(\alpha/2), \; R_A = P \cos(\alpha/2)}$

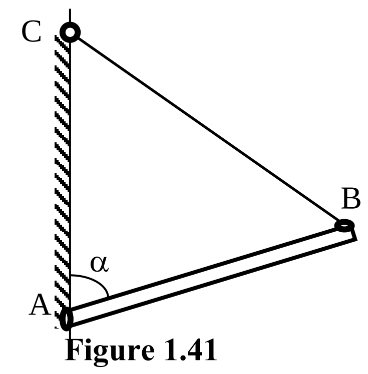


Figure 1.41

1.14. Un réservoir métallique de poids W = 48KN, de rayon r = 0.9m, repose sur les arêtes de deux murs comme le montre la figure 1.42. La distance entre les deux murs *l* = 1.4m. En négligeant le frottement entre les surfaces de contacts, déterminer les pressions du réservoir sur les arêtes des murs en A et B.
S.A. : $\mathbf{R_A = R_B = 38.13\ KN}$

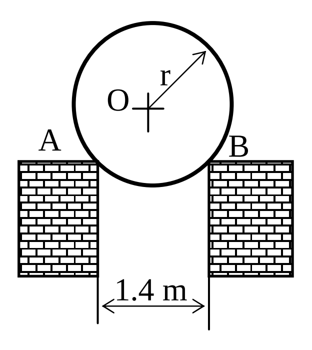
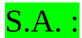


Figure 1.42

1.15. Le câble BC et la barre AC sont attachés au poteau DC au point C comme le montre la Figure 1.43. Le poteau DC s'appuyant librement en D est maintenu en équilibre au point C par deux autres câbles métalliques perpendiculaires entre eux et parallèles aux axes du plan horizontal **(H)** et ayant des tensions égales, de grandeur T = 25 KN. Sachant que les angles α = 30° et φ = 60°, déterminer la tension dans le câble BC, la réaction dans la barre AC et la réaction verticale du poteau CD.



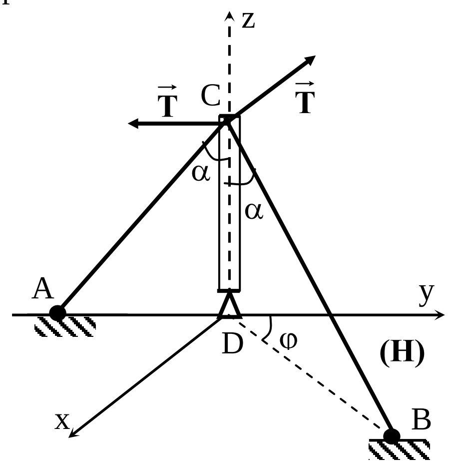


Figure 1.43

1.16. Le système représenté dans la Figure 1.44, est formé de deux barres homogènes BD et CD, de poids négligeable, articulées en point D, faisant un angle droit entre elles dans le plan (yz) et qui sont liées au point D par un câble AD au point A. Le système est tiré en D par un tirant de tension F = 495 N dirigée dans le sens opposé et parallèle à l'axe ox. Déterminer les réactions dans les deux barres DB et DC ainsi que la tension dans le câble DA (les dimensions sont montrées dans la figure 1.44.).

S.A. : $\mathbf{T_A = 700\ N,\ R_B = 396\ N,\ R_C = 296.9\ N}$

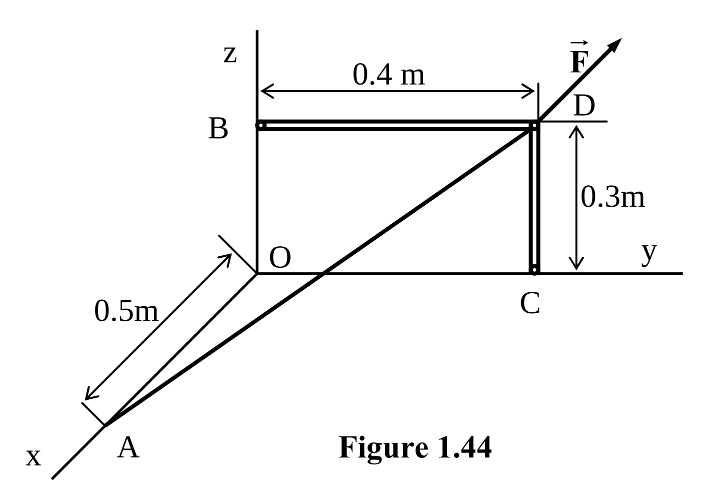


Figure 1.44

1.17. Le fardeau de poids Q = 98 KN est suspendu à l'anneau D par deux câbles AD et BD et soutenu par la barre CD comme le montre la Figure 1.45.
- Déterminer les tensions dans les câbles AD et BD et la réaction de la barre CD, sachant que les coordonnées des points de liaisons sont données comme suit : A(5,2,3), B(0,2,7), C(2,2,3), D(2,6,3) (unité en dm)

S.A. : $\mathbf{T_A = 74.17\ KN, T_B = 133.5\ KN, R_C = 148.33\ KN}$

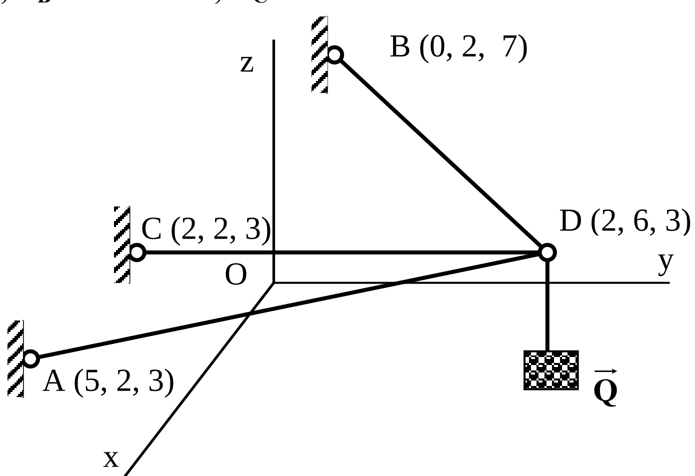


Figure 1.45

1.18. Une charge de poids P = 30 KN suspendu au point D comme le montre la Figure 1.46. Déterminer les réactions dans les liaisons.

S.A :

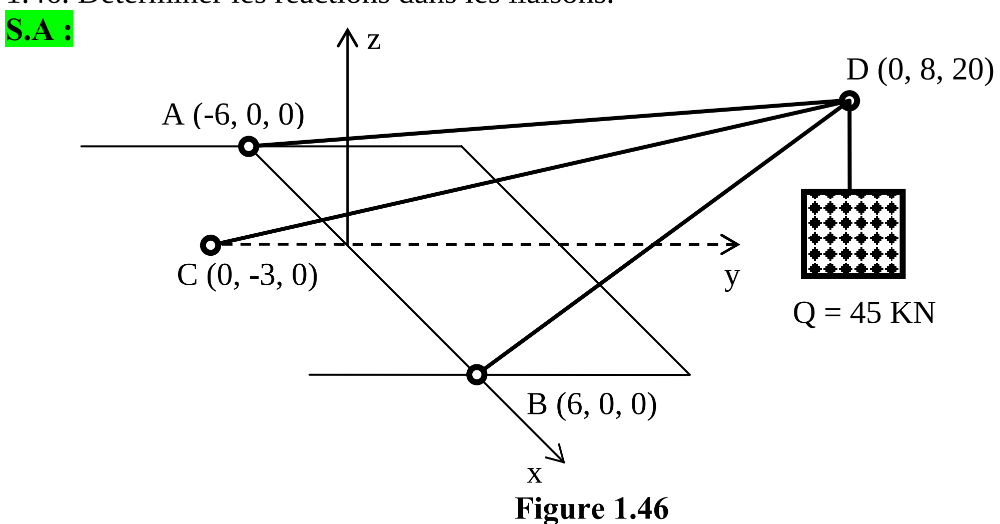


Figure 1.46

1.19. Déterminer les réactions dans les liaisons représentées dans la figure 1.47 (a, b, c, d, e, f, g, h). Le poids propre de chaque corps solide est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté sur chaque figure.

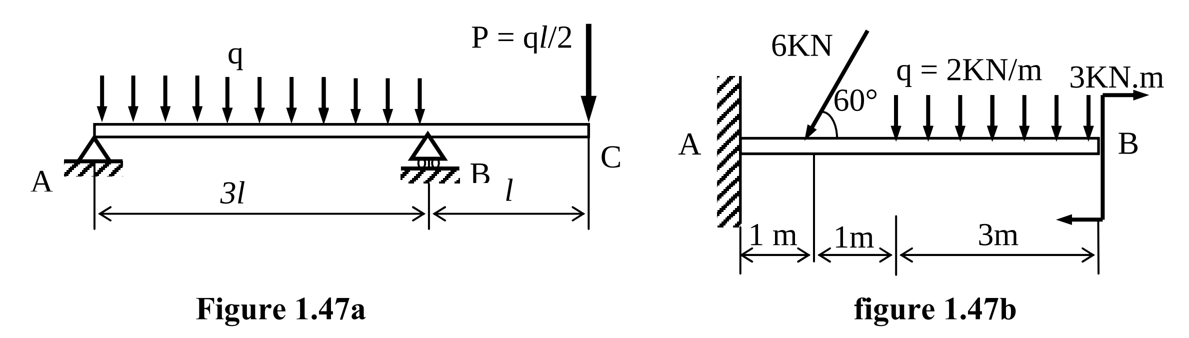


Figure 1.47a **figure 1.47b**

R_{Ax} = 0, R_{Ay} = - 28,5 KN, R_{By} = 51,5 KN **M_A = 29.2 KN-m, R_{Ax} = 3 KN, R_{Ay} = 11.2 KN**

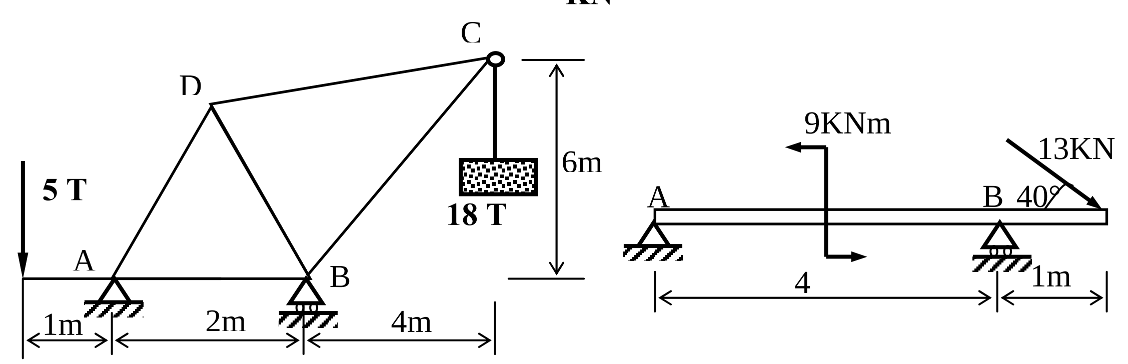
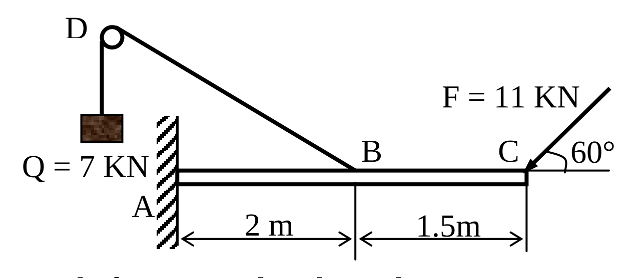
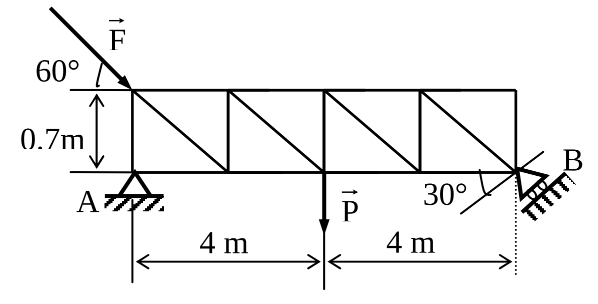


Figure 1.47c **Figure 1.47d**





le frottement dans la poulie D est

Figure 1.47e **Figure 1.47f**

T_B = Q = 7 KN, M_A = 25.31 KN-m, R_{Ax} = 11.23 KN, R_{Ay} = 5.51 KN

R_B = 20.71 KN, R_{Ax} = 5.35 KN, R_{Ay} = 25.72 KN

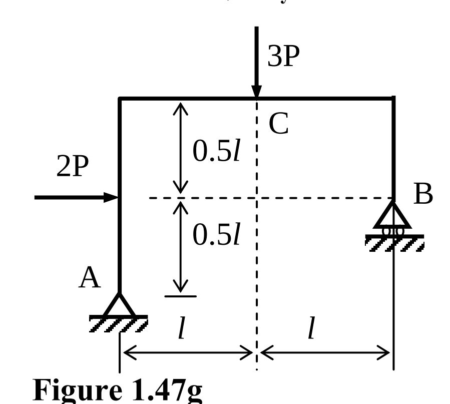


Figure 1.47g

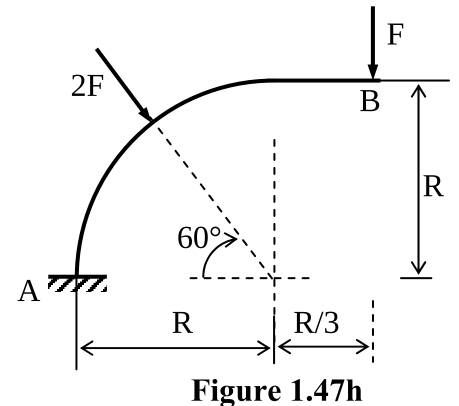


Figure 1.47h

1.20. Une poutre AB de poids W =1 KN, fait un angle de 60° avec la verticale, articulée en A dans le mur et soutenue en B par un câble passant par une poulie C et portant une charge $\vec{P}$; le tronçon du câble BC fait un angle de 45° avec la verticale. Une charge Q = 0.8 KN est suspendue au point D de la poutre. Le reste des données est montré dans la Figure 1.48, déterminer la charge P et la réaction en A (le frottement dans la poulie C est négligeable).

S.A. : $\mathbf{R_{Ax} = 0.65\ KN, R_{Ay} = 1.15\ KN\ (R = 1.13\ KN), T_B = 0.92\ KN, P = T_C = 0.93\ KN}$

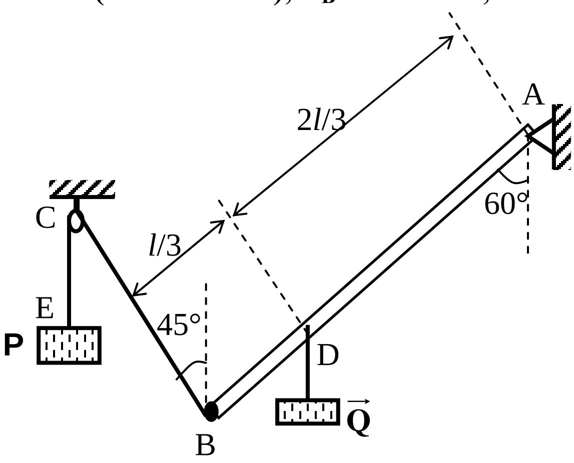


Figure 1.48

1.21. Un poteau de signalisation est fixé de la façon montré dans la Figure 1.49 . Calculer les réactions de l'articulation en A et la tension dans le fil BC.

S.A. : $\mathbf{R_{Ax} = 31.25\ N, R_{Ay} = 550.33\ N, T_C = 129.14\ N}$

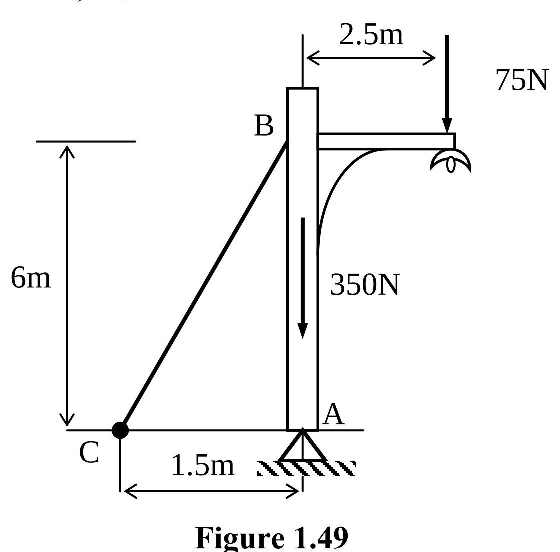


Figure 1.49

1.22. Le couvercle rectangulaire ABCD d'une cave est soutenu à l'état ouvert par une béquille EC en C. le poids du couvercle est P = 17 KN; DC = DE; l'angle EDC = 60° (Figure 1.50). Déterminer les réactions aux articulations cylindriques A, D et l'effort R dans la béquille (le poids de la béquille est négligeable).

S.A. : $\mathbf{R_{Ax} = 0, R_{Az} = 8.5\ KN, R_C = 4.9\ KN, R_{Dx} = 2.45KN, R_{Dz} = 4.25\ KN}$

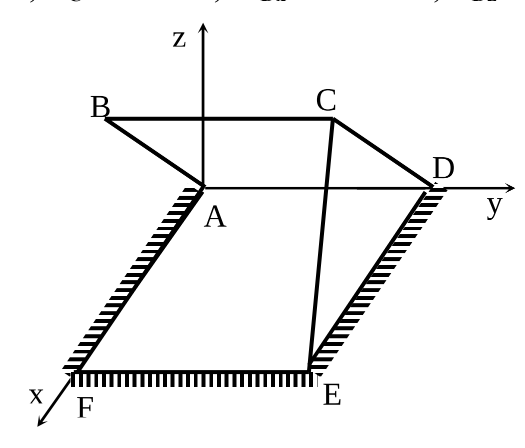


Figure 1.50

1.23. Un mât de charge de 4m de longueur est soumis à une force verticale de 20KN tel qu'indiqué sur la figure 1.51. Calculer l'effort de tension dans chaque câble et la résultante de réaction d'appui en O (articulation sphérique).

S.A. : $\mathbf{T_B = 0.76P = 15.2\ KN, T_C = 1.41P = 28.2KN, R_{ox} = 0, R_{oy} = 2P = 40KN,}$
$\mathbf{R_{oz} = 0.5P = 10KN}$

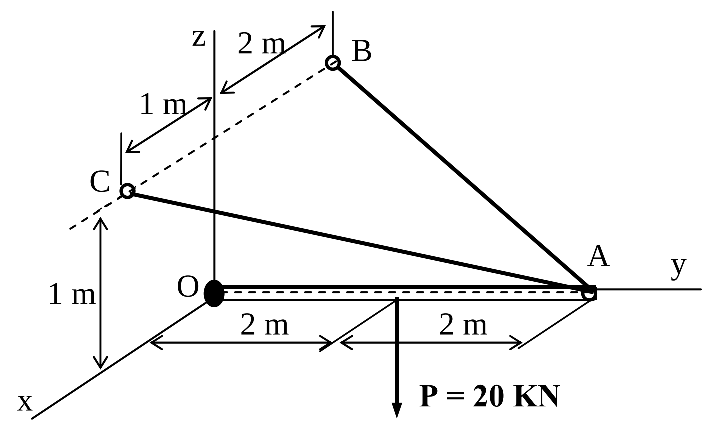


Figure 1.51

1.24. Le mât de 10m de hauteur est soumis à une force horizontale Q = 9KN, tel qu'illustré dans la Figure 1.52. Il est appuyé sur une rotule A et soutenu par deux câbles BD et BE. Supposons que le poids du mât est négligeable, calculer l'effort dans chaque câble ainsi que la réaction d'appui en A.
S.A. **:** $\mathbf{R_{Az} = 15\ KN, R_{Ay} = 3.85KN, T_D = 14.33\ KN, T_E = 7.80KN}$

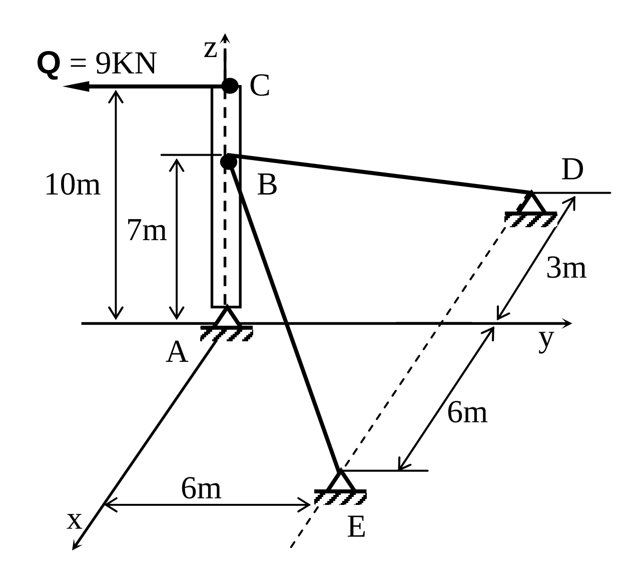


Figure 1.52

1.25. Une plaque carrée ABCD horizontale, de côté a = 60cm, de poids P = 5KN, est articulée en A par une articulation sphérique, en B par une articulation cylindrique et appuyée en E sur un appui simple. Au point H, elle est soumise à une force $\vec{\mathbf{F}}$, inclinée d'un angle α avec le côté BC dans le plan horizontal (Figure 1.53). Sachant que l'angle α=60°, CE = ED = 0.5a = 30cm, BH = a/3 = 20cm et **F** =11 KN ; déterminer les réactions dans les liaisons A, B et E.


S.A.

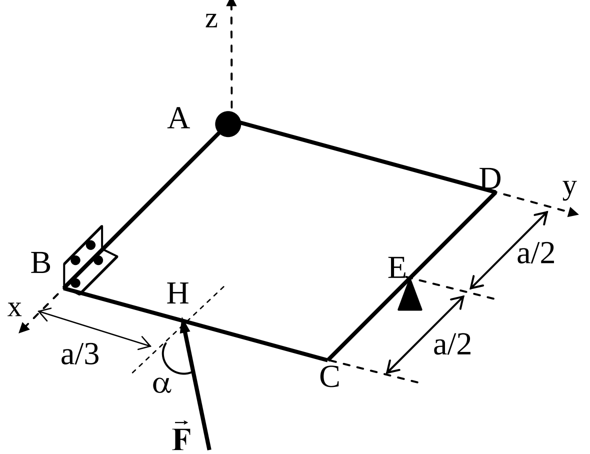


Figure 1.53

1.26. L'échelle AB de poids $\vec{\mathbf{P}}$ est appuyée contre un mur rugueux sur un sol rugueux. Le coefficient de frottement de l'échelle sur le mur est égal à f_m (Figure 1.54). Déterminer le coefficient de frottement f_s de l'échelle sur le sol si l'angle d'inclinaison maximale de l'échelle sur l'horizontale qui assure l'équilibre est égal à α.

S.A. : $\mathbf{f_s} = \dfrac{\cos\alpha}{2\sin\alpha + \mathbf{f_m}\cos\alpha}$

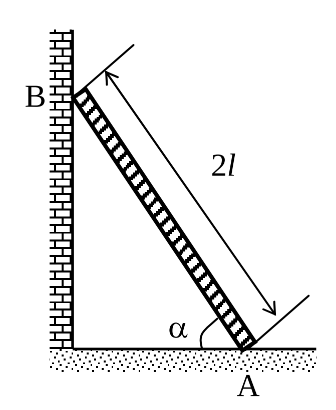


Figure 1.54

1.27. Deux tiges identiques de section uniforme de masse 8Kg chacune sont assemblées par des pivots en A et B sans frottement. On constate que l'ensemble s'effondre lorsqu'on lui applique une force $\vec{\mathbf{P}}$ supérieur à 140N (Figure 1.55). Calculer le coefficient de frottement au point C.
S.A. : $\mathbf{f_s = 0.23}$

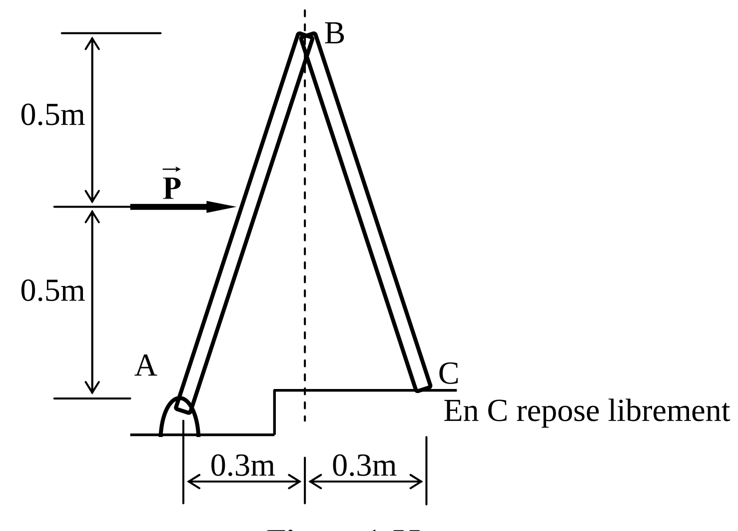


Figure 1.55

1.28. On applique une force F = 175 KN sur un bloc G = 300 KN, placé sur un plan incliné comme le montre la Figure 1.56. Le coefficient de frottement statique sur le plan incliné est f_s = 0.35 .
- Vérifier l'équilibre du bloc et calculer le module de la force de frottement, si f_s = 0.15, Que remarquez vous ?

S.A. :
a- si f_s = 0.35, F_{max} = 53.4 KN et F_{fr} = 28.4 KN , $F_{max} > F_{fr}$ le bloc G reste en équilibre
b- si f_s = 0.15, F_{max} = 22.9 KN et F_{fr} = 28.4 KN , $F_{max} < F_{fr}$ le bloc G ne restera pas en équilibre

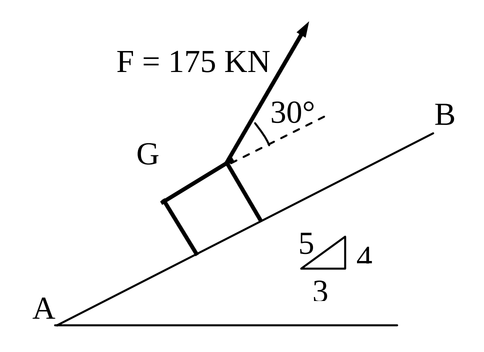


Figure 1.56

1.29. Un bloc reposant sur une surface cylindrique, est soumis à deux forces. Si β = 45° (Figure 1.57), calculez :

a- la force P nécessaire pour faire monter le bloc le long de la surface

b- la plus petite force P qui empêche le bloc de descendre.

S.A. : a- $\mathbf{P_{max} = 1661.5\ KN}$,

b- $\mathbf{P_{min} = 386.5\ KN}$

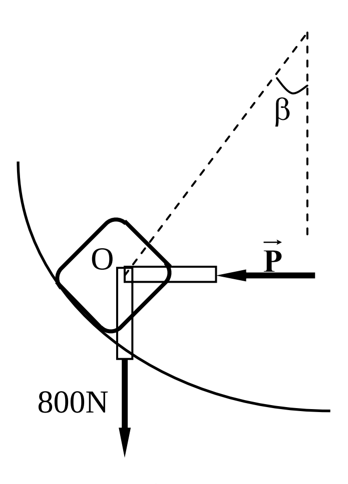


Figure 1.57

1.30. La barre rigide AB de poids $\vec{\mathbf{P}}$ et de longueur *l*, est appuyée contre deux plans inclinés, AC rugueux et BC poli, les données nécessaires sont représentées sur la Figure 1.58.

- Définir le rôle, le point d'application, la direction, le sens et le module de la force de frottement lorsque la barre se trouve à mi-chemin entre le repos et le mouvement.

-Dans ce cas, déterminer le coefficient de frottement f_s de la barre sur le plan incliné AC.

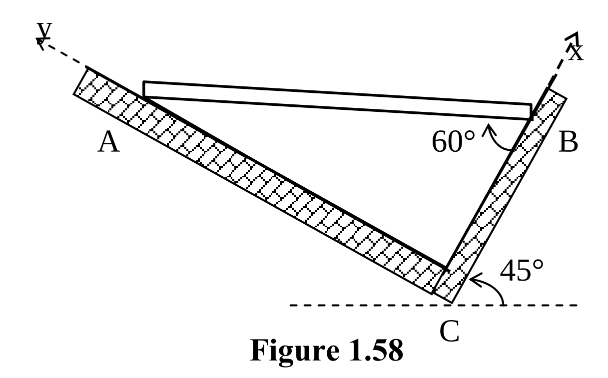


Figure 1.58

1.31. Une échelle BC de poids P, de longueur l est appuyée sur un mur; son extrémité inférieure B est maintenue par un câble AB (Figure 1.59).

a- En négligeant le frottement des surfaces de contacts, calculer les réactions des surfaces de contacts ainsi que la tension du câble AB.

b- Si on supprime le câble pour que la tige repose librement sur le sol rugueux, déterminer le coefficient de frottement nécessaire pour que la tige reste en équilibre.

S.A. :

a- $N_C = 0.5\, P \cos\alpha$, $N_B = P\left(1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{2}\right)$, $T_A = 0.5\, P \cos\alpha \sin\alpha$

b- $f_s = \dfrac{\cos\alpha \sin\alpha}{2 - \cos^2\alpha}$

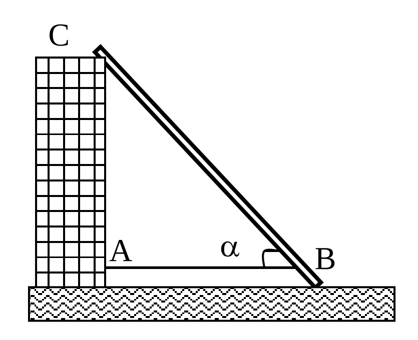


Figure 1.59

1.32. Un traîneau en bois transportant un bloc de pierre qui doit monter le long d'un plan incliné de 20° par rapport à l'horizontale. La masse de l'ensemble est de 800kg et le coefficient de frottement entre les patins du traîneau et le plan incliné est $\mu_s = 0.4$ (Figure 1.60). Calculer la force $\vec{Q}$ requise :

a- pour faire démarrer le traîneau ;
b- pour le faire monter à vitesse constante ;
c- pour le faire descendre à vitesse constante.

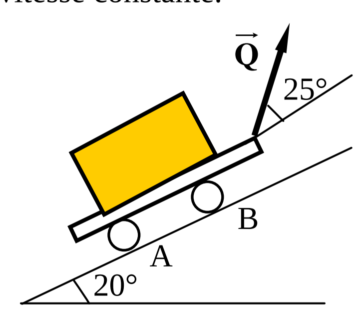


Figure 1.60

Chapitre 2 : GÉOMÉTRIE DES MASSES

2.1. INTRODUCTION

Ce chapitre concerne les notions sur la masse, le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie. L'intérêt mécanique de ces grandeurs apparaîtra en cinétique et en dynamique.

2.2. MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL

La masse mesure la quantité de matière contenue dans un corps donné. Elle est invariable au cours du temps (en mécanique galiléenne) et possédant la propriété d'additivité, à savoir : la masse d'un système matériel est la somme des masses de ses parties élémentaires. La masse est une grandeur scalaire positive.

Un système matériel est un ensemble discret ou continu de points matériels.

2.2.1. Système continu

On appelle masse d'un système matériel continu, la grandeur scalaire :

$$\mathbf{m} = \int_{p \in (S)} \mathbf{dm(P)} \tag{2.1}$$

dm(P) : est la mesure de la masse élémentaire du système matériel au voisinage du point matériel P.

- Si le corps (S) a un volume V :

$$\mathbf{m} = \int_{V} \rho\mathbf{(P)dv} \tag{2.2}$$

Où **dv** est un élément de volume et **ρ(P)** est la masse volumique du corps au point P.
Pour un système homogène, la masse volumique est constante et $m = \rho\, V$.

- Si le corps (S) a une surface S, le cas d'une plaque par exemple :

$$\mathbf{m} = \int_{s} \sigma\mathbf{(P)ds} \tag{2.3}$$

Où **ds** est un élément de surface et **σ(P)** est la densité surfacique au point P.

- Si le corps (S) a une courbe L (le cas d'une ligne matérielle) :

$$\mathbf{m} = \int_{L} \lambda\mathbf{(P)dl} \tag{2.4}$$

Où **dl** est un élément de longueur et **λ(P)** est la densité linéique au point P.

2.2.2. Système discret

La masse d'un système formé de **n** points matériels de masse $\mathbf{m_i}$ est la somme des masses :

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i} \tag{2.5}$$

2.3. CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

2.3.1. Définition

On appelle centre d'inertie où centre des masses **G** du solide le barycentre des différentes centres **P** des éléments de masses élémentaires dm :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\,dm(P) = 0 \tag{2.6}$$

Si **O** étant un point arbitraire de l'espace.

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\,dm(P) = \int_{P\in(S)} \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}\right) dm(P) = \vec{0}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P\in(S)} dm} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm$$

Si nous rapportons l'espace à un repère orthonormé R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) d'origine O (Figure 2.1), nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OG} = X_G\,\vec{x} + Y_G\,\vec{y} + Z_G\,\vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Figure 2.1

Les coordonnées du centre d'inertie d'un système matériel G sont donc exprimées par :

$$X_G = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} x\,dm \quad , \quad Y_G = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} y\,dm \quad , \quad Z_G = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} z\,dm \tag{2.7}$$

2.3.2. Exemple d'application

***a*)- (S) est un volume**

Déterminer la position du centre d'inertie d'une demi sphère homogène pleine de rayon R (Figure 2.2a).

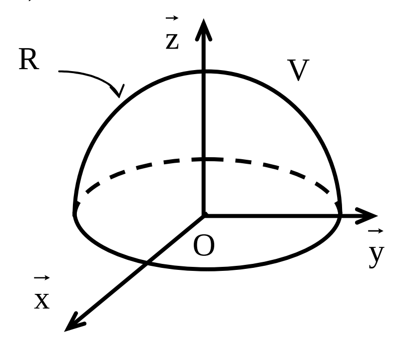


Figure 2.2a

Figure 2.2b

Nous avons la formule générale :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm$$

Par raison de symétrie : $X_G = Y_G = 0$

Sachant que

$$dm = \rho\, dv \text{ et } M = \rho V$$

La côte du centre d'inertie est donc :

$$Z_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (m)} z dm \Rightarrow Z_G = \frac{1}{V} \iiint_{P \in (V)} z dv$$

Pour un élément de volume **dv** d'épaisseur dz (**Figure 2.2b**):

Nous avons $R^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$

Cet élément de volume **dv** choisi, s'écrit :

$$dv = \pi r^2 dz \Rightarrow dv = \pi (R^2 - z^2) dz$$

D'où :

$$Z_G = \frac{1}{V} \int_0^R \pi\, (R^2 - z^2) z\, dz$$

Et, par conséquent :

$$Z_G = \frac{\pi}{V}\left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{V}\,\frac{R^4}{4}$$

Or : $V = \frac{2}{3}\pi R^3$

Donc :

$$Z_G = \frac{3}{8}R$$

2.3.3. Cas d'un système complexe

Très souvent un système est composé d'un ensemble de systèmes élémentaires pour lesquels les calculs sont aisés, chacun de ces systèmes a un centre d'inertie G_i et une masse $\mathbf{m_i}$. D'après le théorème de l'intégration, le centre d'inertie du système complexe s'obtient par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \sum_{i=1}^{n} \int_{P\in S_i} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Or :

$$\overrightarrow{OG_i} = \frac{1}{m_i} \int_{P\in S_i} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OG_i} \qquad (2.8)$$

Le point **G** est donc le barycentre des points $\mathbf{G_i}$ affectés des coefficients $\mathbf{m_i}$.

On procède en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie $\mathbf{G_i}$ de chacun des sous-ensembles de masse $\mathbf{m_i}$.
- On détermine le centre d'inertie **G** comme barycentre des points $\mathbf{G_i}$ affectés des coefficients $\mathbf{m_i}$.

Remarque :

Il ne faut pas confondre le centre d'inertie avec le centre de gravité. Le centre de gravité C est, par définition, le point d'application du poids du solide.
Le centre de gravité C coïncide avec le centre d'inertie G si et seulement si le champ de pesanteur est uniforme.

2.3.4. Théorème de GULDIN

Il existe deux théorèmes de Guldin pour la détermination du centre de gravité.

1er théorème : le centre d'inertie d'une courbe plane

Etant donné un arc de courbe plane Γ , de longueur L, de densité linéique λ , tournant autour d'un axe fixe de son plan, sans le rencontrer (Figure 2.3). La rotation de l'arc engendre une surface de révolution dont l'aire latérale est égale au produit de la longueur de l'arc par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de Γ.

$$\mathbf{S_{\Gamma} = \ell_{\Gamma}.2.\pi.R_G} \qquad (2.9)$$

Où R_G est le rayon du cercle décrit par le centre G.

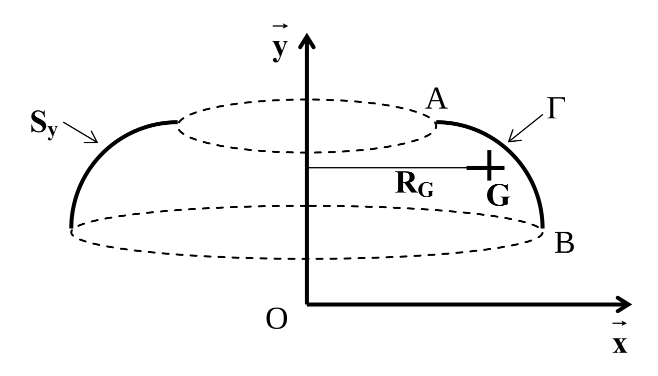


Figure 2.3.

Suivant l'axe x, pour d**m = λdl**, d'après la relation (2.7) on écrit :

$$\mathbf{x_G = \frac{\int_{\Gamma} \lambda x dl}{m}}$$

Si λ est constant et L est la longueur de Γ, on peut écrire pour ($\mathbf{R_G = x_G}$) :

$$\mathbf{L\,x_G = \int_{\Gamma} x dl \;\Leftrightarrow\; 2\pi \times L\,x_G = 2\pi \times \int_{\Gamma} x dl = \int_{\Gamma} 2\pi\, x dl \Leftrightarrow 2\pi L\,x_G = S_y}$$

Où S_y représente l'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe Oy. On a donc :

$$\mathbf{x_G = \frac{S_y}{2\pi L}}$$

Lorsque la courbe tourne autour de l'axe x, elle engendre la surface $\mathbf{S_x}$, d'où :

$$\mathbf{y_G = \frac{S_x}{2\pi L}}$$

2e théorème : le centre d'inertie d'une surface plane

Etant donné une portion de surface S, tournant autour d'un axe fixe de son plan, sans le rencontrer (Figure 2.4). Cette surface engendre un volume intérieur **V** égal au produit de l'aire $\mathbf{A_S}$ de la surface par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de cette aire supposée homogène.

$$\mathbf{V = A_S .2.\pi.R_G} \qquad (2.10)$$

Si $\mathbf{V_y}$ et $\mathbf{V_x}$ sont les volumes engendrés par la rotation de la surface S autour des axes Ox et Oy. Les coordonnées du centre d'inertie s'expriment :

$$x_G = \frac{V_y}{2\pi A_S} \quad ; \quad y_G = \frac{V_x}{2\pi A_S}$$

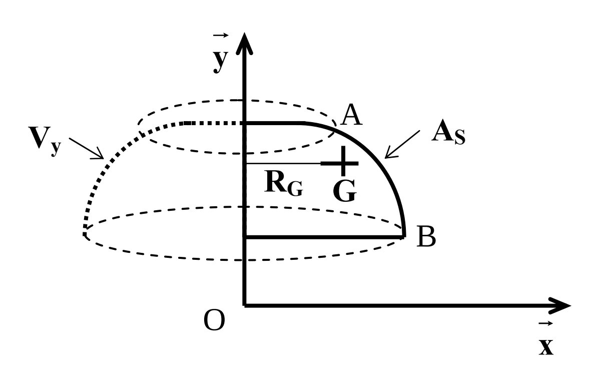


Figure 2.4.

2.3.5. Exemples d'applications

a)- Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle (**Figure 2.5a**).

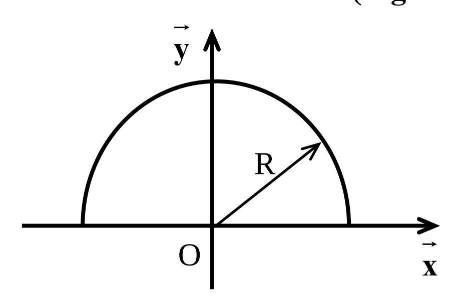


Figure 2.5a

Solution :

Par raison de symétrie G se trouve sur l'axe Oy ($\mathbf{X_G = 0}$).
D'après le 1ier théorème de GULDIN :

$$\mathbf{S_\ell = \pi.R.2.\pi.R_G}$$

La rotation du demi-cercle, autour de l'axe Ox engendre une sphère de surface (Figure 2.5b):

$$\mathbf{S_\ell = 4.\pi.R^2}$$

D'où :

$$R_G = Y_G = \frac{2.R}{\pi}$$

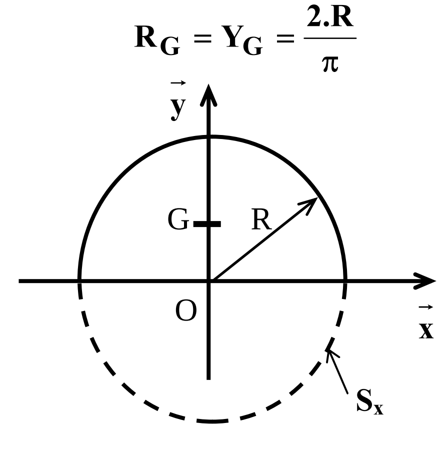


Figure 2.5b

b)- Déterminer le centre d'inertie d'un demi disque matériel (**Figure 2.6a**):

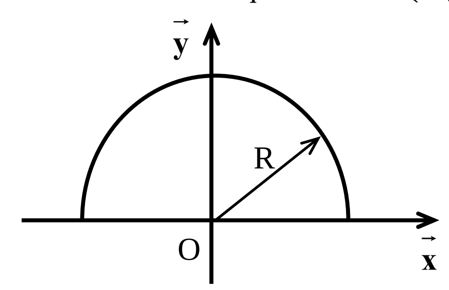


Figure 2.6a

Solution :

Le centre G se trouve sur Oy ($x_G = 0$: Centre de symétrie)

D'après le 2ième théorème de Guldin

$$V = \frac{\pi.R^2}{2}.2\pi.R_G$$

La rotation du demi disque autour de l'axe Ox (Figure 2.6b), engendre une sphère de volume :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

D'où

$$R_G = Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Figure 2.6b

2.4. TENSEUR D'INERTIE

2.4.1. Définition

On appelle moment d'inertie d'un système discret homogène par rapport à un axe Δ , la quantité :

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Où $\mathbf{r_i}$ est la distance du point P_i représentant l'élément matériel de masse $\mathbf{m_i}$ à l'axe Δ.
Pour un système continu, on a :

$$I_\Delta = \int_V r^2\, dm = \int_V \rho\, r^2\, dv \tag{2.11}$$

On peut aussi écrire $I_\Delta = m R^2$, où **m** est la masse totale du système et **R** le rayon de giration.

2.4.2. Matrice d'inertie

Pour un solide (S) donné, un point O appartenant à (S) et un repère orthonormé R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$), on appelle tenseur d'inertie de (S), en O, relativement au repère considéré, noté I_O , la matrice symétrique :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Où :

$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe des x.

$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe des y.

$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)\, dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe des z.

$I_{xy} = \int_{(S)} x\, y\, dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oy .

$I_{xz} = \int_{(S)} x\, z\, dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oz .

$I_{yz} = \int_{(S)} y\, z\, dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Oy et Oz .

2.4.3. Cas particuliers

a)- Le système présente certains plans de symétrie

- Si Oxy est un plan de symétrie : à tout point M_1 de côte z, on peut associer le point M_2 de côté –z (Figure 2.7.):

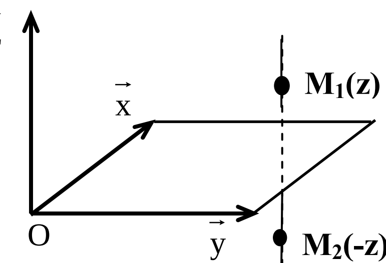


Figure 2.7.

$$\mathbf{I_{xz}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{x\,z\,dm = 0} \quad \text{et} \quad \mathbf{I_{yz}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{y\,z\,dm = 0} \quad \text{Car} \quad \mathbf{z_G = 0}$$

- Si Oyz est plan de symétrie : à tout point M_1 de côte x, on peut associer le point M_2 de côté -x (Figure 2.8) :

$$\mathbf{I_{yx}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{y\,x\,dm = 0} \quad \text{et} \quad \mathbf{I_{zx}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{z\,x\,dm = 0} \quad \text{Car} \quad \mathbf{x_G = 0}$$

Figure 2.8.

- De même, Si Oxz est plan de symétrie : à tout point M_1 de côte y, on peut associer le point M_2 de côté -y (Figure 2.9):

$$\mathbf{I_{yz}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{y\,z\,dm = 0} \quad \text{et} \quad \mathbf{I_{xy}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{x\,y\,dm = 0} \quad \text{Car } \mathbf{y_G = 0}$$

Figure 2.9

b)- Le système est un corps de révolution autour de l'axe Oz :

Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie ; en particulier les plans Oxz et Oyz, donc :

$\mathbf{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$

$\mathbf{I_{xx} = I_{yy}}$ (Ox et Oy ont le même rôle)

2.4.4. Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie $\mathbf{I_0}$ est diagonalisable, il existe une base orthonormée $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ dans laquelle elle est diagonale :

$$\mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} I_{0x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{OZ_1} \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Les termes de la diagonale sont les moments d'inertie principaux ou moments d'inertie autour des axes principaux Ox, Oy, Oz. Corrélativement, les produits d'inertie sont nuls.

Pour un solide quelconque, la recherche de ses axes principaux conduit à une équation du troisième degré (équation aux valeurs propres de la matrice d'inertie).

2.4.5. Théorème de Huygens

Connaissant le moment d'inertie par rapport à un axe **(Δ)** passant par le centre d'inertie **O**, le théorème de Huygens permet de calculer le moment d'inertie par rapport à tout axe $A\vec{u}$ parallèle à $O\vec{u}$.

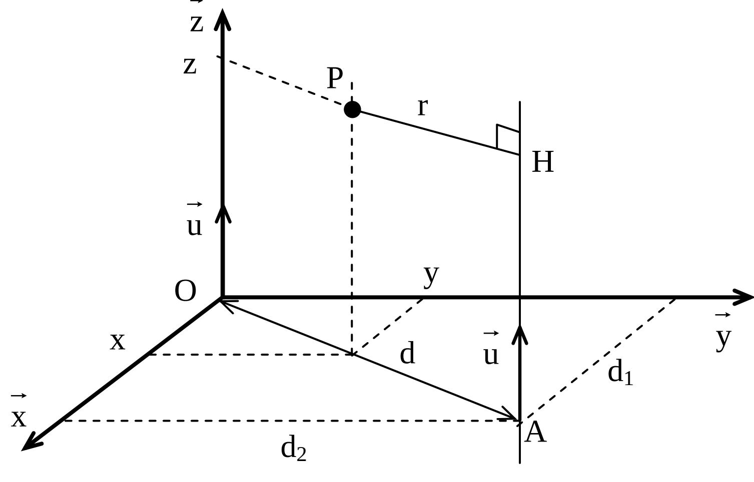


Figure 2.10.

Considérons le repère R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) représenté sur la Figure 2.10 .
Soit :
$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{OH} = (d_1, d_2, z)$

On a alors :

$$\overrightarrow{\mathbf{HP}} = (\mathbf{x} - \mathbf{d_1},\ \mathbf{y} - \mathbf{d_2},\ \mathbf{0})$$

D'où

$$\mathbf{I}_{A\vec{u}} = \int_V \left((x - d_1)^2 + (y - d_2)^2\right) dm$$

$$\mathbf{I}_{A\vec{u}} = \int_V \left(x^2 + y^2\right) dm + \int_V \left(d_1^2 + d_2^2\right) dm - 2 \int_V (x d_1 + y d_2) dm$$

$$\mathbf{I}_{A\vec{u}} = \mathbf{I}_{O\vec{u}} + md^2 - 2\ d_1 \int_V x\, dm - 2\ d_2 \int_V y\, dm$$

Où d est la distance entre $O\vec{u}$ et $A\vec{u}$.

Or par définition, $\int_V x\, dm = \int_V y\, dm = 0$ car O est le centre d'inertie. On a donc :

$$\mathbf{I}_{A\vec{u}} = \mathbf{I}_{O\vec{u}} + md^2 \qquad (2.14)$$

Enoncé du théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $A\vec{u}$ est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle à $O\vec{u}$ passant par le centre de masse du solide augmenté du produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à Ox.

2.4.6. Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque (Δ)

Le moment d'inertie par rapport à une droite est défini par :

$$\mathbf{I}_\Delta = \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

Où **r** représente la distance de l'élément matériel P à la droite (Δ) ;

Si le tenseur d'inertie en O étant connu $\mathbf{I_O}$, le moment d'inertie par rapport à la droite Δ (Figure 2.11), passant par O et de direction $\vec{\mathbf{n}}$ est :

$$\mathbf{I}_\Delta = \vec{\mathbf{n}}^t . \mathbf{I_O} . \vec{\mathbf{n}} \qquad (2.15)$$

Où $\vec{\mathbf{n}}^t$ est le transposé du vecteur directeur unitaire de la droite (Δ) ;

Donc le moment d'inertie du système (S) par rapport à la droite (Δ, $\vec{n}$) est le produit doublement contracté du tenseur d'inertie $\mathbf{I_O}$ par le vecteur unitaire $\vec{n}$.

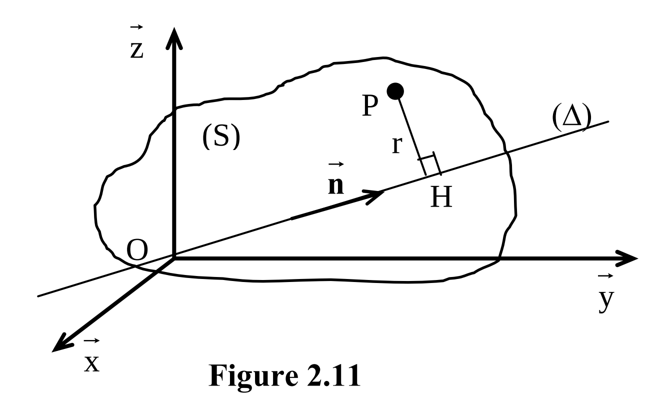


Figure 2.11

2.4.7. Produit d'inertie par rapport à deux droites perpendiculaires

Le produit d'inertie noté $\mathbf{I_{nt}}$ est défini par :

$$\mathbf{I_{nt}} = \int_{P\in(S)} \mathbf{x_n\, x_t\, dm}$$

Avec $\mathbf{x_n}$ et $\mathbf{x_t}$ sont les coordonnées de P sur les axes (Δ) et (Δ')

$$\mathbf{x_n} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}\,\vec{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{x_t} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}\,\vec{\mathbf{t}}$$

Le tenseur d'inertie étant connu en O $\mathbf{I_O}$, le produit d'inertie par rapport aux droites perpendiculaires $\mathbf{\Delta(O,\vec{n})}$ **et** $\mathbf{\Delta'(O,\vec{t})}$ (Figure 2.12) est :

$$\mathbf{I_{nt}} = -(\vec{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}}.\mathbf{I_O}.\vec{\mathbf{n}} \qquad (2.16)$$

Où :

$\vec{\mathbf{n}}$: Vecteur directeur unitaire de la droite (Δ) passant par O ;

$(\vec{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}}$: Le transposé du vecteur directeur unitaire $\vec{\mathbf{t}}$ de la droite (Δ') perpendiculaire avec (Δ) en O.

Le produit d'inertie d'un système par rapport à deux droites perpendiculaires (O, $\vec{n}$) et (O, $\vec{t}$) est égal à l'opposé du produit doublement contracté du tenseur d'inertie par les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$.

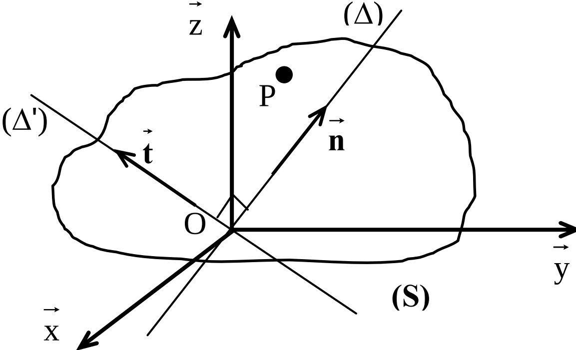


Figure 2.12.

EXERCICES RESOLUS

2.1. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un quart de cercle matériel (S), de rayon R (Figure 2.13a);

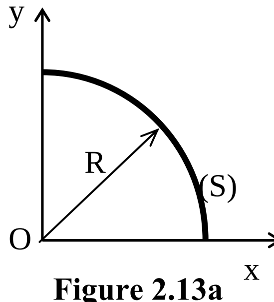


Figure 2.13a

Solution :

a- le premier théorème de Guldin.

La surface engendrée par la rotation du quart de cercle matériel autour de l'axe Ox est une demi sphère de surface (Figure 2.13b) :

$\mathbf{Sx = L_\Gamma\ 2\pi\ y_G}$

La longueur du quart de cercle où du périmètre est :

$\mathbf{L_\Gamma = \pi R/2}$

D'où :

$\mathbf{Sx = Sy = \pi^2\ R\ x_G = \pi^2\ R\ y_G}$ (1)

D'autre part, la surface géométrique de la demi-sphère est :

$\mathbf{Sx = 2\pi R^2}$ (2)

Egalisant les relations (1) et (2), on obtient les coordonnées du centre de gravité du quart de cercle :

$\mathbf{x_G = 2R/\pi}$

La même chose, lorsque (S) tourne autour de l'axe (Oy), on obtient :

$\mathbf{y_G = 2R/\pi}$

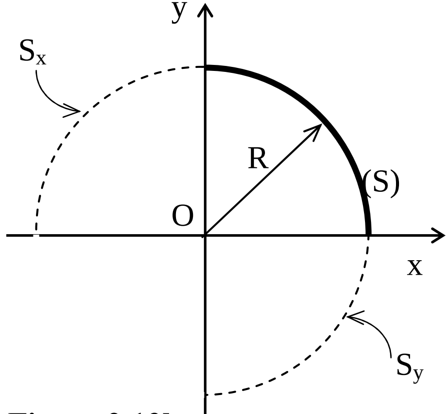


Figure 2.13b

b- la méthode analytique :

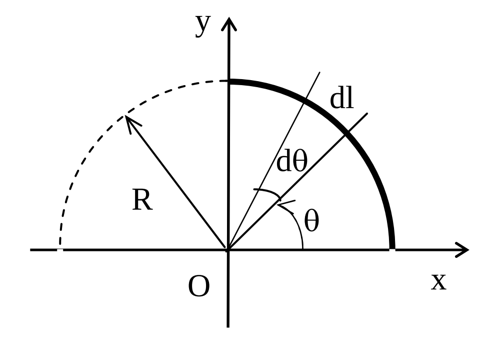


Figure 2.13c

D'après la formule du centre de gravité d'une ligne matérielle de masse linéique λ (Figure 2.13c):

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int \lambda x dl}{\lambda L} = \frac{\int x dl}{L}$$

Or **dl = Rdθ** , avec **0 ≤ θ ≤ π/2**

Et **x = R cos θ**

$$x_G = \frac{\int R\cos\theta\, R\, d\theta}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}{\pi} = \frac{2R}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

La même chose avec y_G :

$y_G = 2R/\pi$

D'où, les coordonnées du centre de gravité du quart du cercle matériel :

$x_G = y_G = 2R/\pi$

2.2. Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport à un repère orthonormé (O, xyz), d'un cylindre homogène (S), de centre O, et de rayon R (Figure 2.14a).

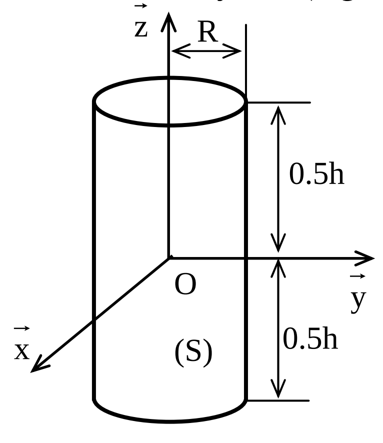


Figure 2.14a

Solution :

La matrice d'inertie d'un cylindre (S) plein, de centre O et de rayon R. l'axe Oz est parallèle à la génératrice L.

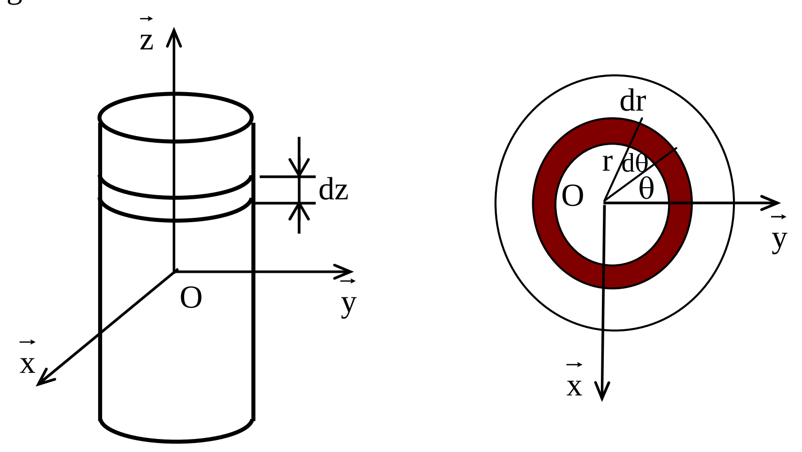


Figure 2.14b **Figure 2.14c**

La matrice d'inertie dans le centre O du cylindre (Figure 2.14a), s'écrit :

$$\mathbf{I_O} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_{xx}} & -\mathbf{I_{xy}} & -\mathbf{I_{xz}} \\ -\mathbf{I_{yx}} & \mathbf{I_{yy}} & -\mathbf{I_{yz}} \\ -\mathbf{I_{zx}} & -\mathbf{I_{zy}} & \mathbf{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de révolution, les produits d'inerties sont nuls :

$$\mathbf{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$$

Le reste des éléments de la matrice s'exprime :

$$\mathbf{I_{xx}} = \int_{(S)} \mathbf{(y^2 + z^2)dm}\,, \quad \mathbf{I_{yy}} = \int_{(S)} \mathbf{(x^2 + z^2)dm}\,, \quad \mathbf{I_{zz}} = \int_{(S)} \mathbf{(x^2 + y^2)dm}$$

- détermination de $\mathbf{I_{zz}}$:

Puisque **x = y,** la base du cylindre forme l'équation du cercle $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ (Figure 2.14c), D'où:

$$\mathbf{I_{zz}} = \int_{(S)} \mathbf{(x^2 + y^2)dm} = \int_{(S)} \mathbf{r^2 dm}$$

La masse **m** du cylindre de masse volumique ρ est :

$\mathbf{m = \rho\, \pi R^2 h}$

Et l'élément de la masse (Figure 2.14c) :

$$dm = \rho \; r dr \, d\theta \, dz$$

avec :

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

d'ici,

$$I_{zz} = \int_{(S)} r^2 dm = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} r^3 dr \, d\theta \, dz = \rho \pi R^2 h \, \frac{R^2}{2} = \frac{M R^2}{2}$$

- détermination de I_{xx} **et** I_{yy} :

Puisque x = y, on aura $I_{xx} = I_{yy}$

Pour la simplification de calcule, on détermine la somme :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm + 2 \int_{(S)} z^2 dm$$

D'où :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

On pose : $I' = \int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(v)} z^2 dV$

L'élément de volume **dV** pour un disque d'épaisseur **dz** et de rayon R est :

$$dV = \pi R^2 dz$$

D'où:

$$I' = \rho \int_{(v)} z^2 dV = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi R^2 z dz = \rho \pi R^2 \frac{h^3}{12} = \frac{m h^2}{12}$$

Et par conséquent :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m R^2}{2} + \frac{m h^2}{12}$$

Donc la matrice d'inertie du cylindre dans le centre O, s'écrit :

$$I_O = m\begin{bmatrix} \left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$

2.3. En déduire la matrice d'inertie d'une barre AB, rectiligne, de longueur h, de milieu O (Figure 2.15).

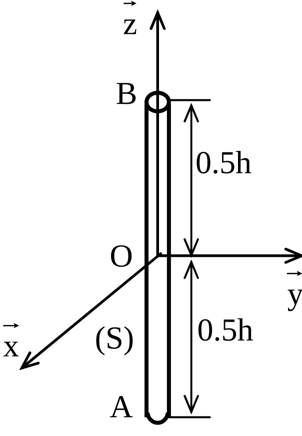


Figure 2.15

Solution :

- Matrice d'inertie d'une tige de longueur h, de centre O

La tige est un cylindre de rayon négligeable devant la longueur h (**r <<< h**) et h parallèle à l'axe de rotation Oz, donc :

$$I_O = \frac{m h^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4. En déduire la matrice d'inertie d'un disque de centre O et de rayon R (Figure 2.16).

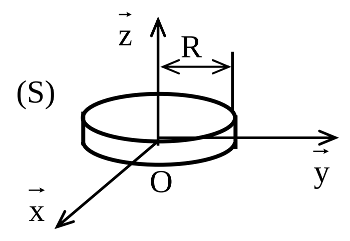


Figure 2.16

Solution :

– La matrice d'inertie d'un disque de rayon R et de centre O.

Le disque est un cylindre de centre O, d'épaisseur **e** négligeable devant le rayon R (**e** <<< **R**), donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$I_O = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.5. Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport à un repère orthonormé (O, xyz), d'un un parallélépipède (S) de côtés ***a***, ***b*** et ***c*** (Figure 2.17). Les axes Ox, Oy et Oz passent par le centre O et sont parallèles aux côtés du parallélépipède.

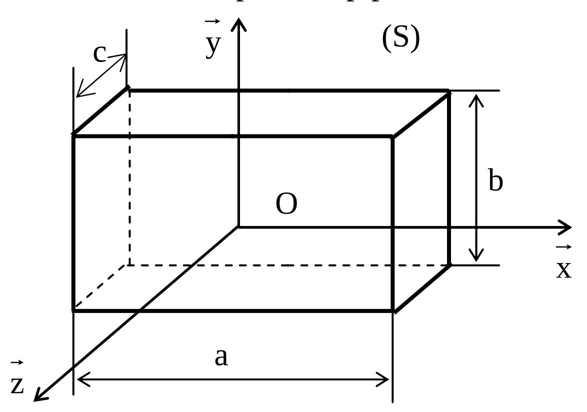


Figure 2.17

La matrice d'inertie au centre O du parallélépipède, s'écrit :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zx} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de symétrie, les produits d'inerties sont nuls ($\mathbf{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$). Le reste des éléments de la matrice s'écrit alors :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm, \quad I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm, \quad I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm$$

La masse **m** du parallélépipède est :

$\mathbf{m = \rho V = \rho\, abc}$

Et l'élément de la masse :

$\mathbf{dm = \rho dxdydz}$, et $\mathbf{-a/2 \le x \le a/2}$, $\mathbf{-b/2 \le y \le b/2}$, $\mathbf{-c/2 \le z \le c/2}$,

On remarque que les termes $\int_{(S)} x^2\,dm$, $\int_{(S)} y^2\,dm$ et $\int_{(S)} z^2\,dm$ tendent vers le calcul d'un seul type d'intégrale $I^* = \int_{(S)} x^2\,dm$

$$I^* = \int_{(S)} x^2\,dm = \rho\int_{(V)} x^2\,dxdydz = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \rho\frac{a^3bc}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

De la même manière :

$$\int_{(S)} y^2\,dm = \frac{mb^2}{12}$$

Et

$$\int_{(S)} z^2\,dm = \frac{mc^2}{12}$$

D'où :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2+z^2)dm = \int_{(S)} y^2dm + \int_{(S)} z^2dm = \frac{m}{12}(b^2+c^2)$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2+z^2)dm = \int_{(S)} x^2dm + \int_{(S)} z^2dm = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm = \int_{(S)} x^2dm + \int_{(S)} y^2dm = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

Donc la matrice d'inertie du parallélépipède au centre O, s'écrit :

$$I_O = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} (b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

2.6. On considère une plaque rectangulaire sans épaisseur et de côtés a et b (Figure 2.18).
1- Déterminer la matrice d'inertie au centre O de la plaque
2- Déterminer la matrice d'inertie au coin C de la plaque
3- Déterminer le moment d'inertie par rapport à une diagonale (Δ) de la plaque.

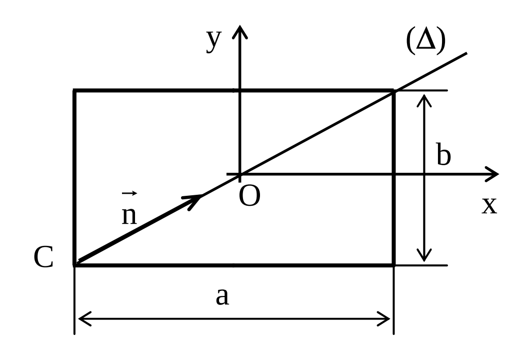


Figure 2.18

Solution :

1- La matrice d'inertie au centre O de la plaque
Puisque la plaque est un parallélépipède d'épaisseur négligeable ($\mathbf{e \approx 0}$), la matrice d'inertie peut être déduite de l'exercice précédent 2.5, où :

$$\mathbf{I_O = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}}$$

2- La matrice d'inertie au coin C de la plaque
La matrice dans le coin C de la plaque s'écrit :

$$\mathbf{I_C = \begin{bmatrix} I_{Cx} & -I_{Cxy} & -I_{Cxz} \\ -I_{Cyx} & I_{Cy} & -I_{Cyz} \\ -I_{Czx} & -I_{Czx} & I_{Cz} \end{bmatrix}}$$

Connaissant les éléments de la diagonale de la matrice en O, donc on peut utiliser le théorème de Huygens pour la détermination des éléments $\mathbf{I_{Cx}}$, $\mathbf{I_{Cy}}$ et $\mathbf{I_{Cz}}$.

$$\mathbf{I_{Cx} = I_{xx} + md_y^2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{mb^2}{3}}$$

$$\mathbf{I_{Cy} = I_{yy} + md_x^2 = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ma^2}{3}}$$

$$\mathbf{I_{Cz} = I_{zz} + md_{OC}^2 = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} + m\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}}$$

Les produits d'inerties $\mathbf{I_{Cxy}}$, $\mathbf{I_{Cxz}}$ et $\mathbf{I_{Cyz}}$

$$\mathbf{I_{Cxy} = \int_{(m)} xydm\,, \quad I_{Cxz} = \int_{(m)} xzdm\,, \quad I_{Cyz} = \int_{(m)} yzdm}$$

Puisque l'épaisseur de la plaque est négligeable, sa variation suivant l'axe z est nul, donc :

$$I_{Cxz} = I_{Cyz} = 0$$

La masse **m** de la plaque de densité surfacique σ est :

$$m = \sigma\, ab$$

Et l'élément de la masse **dm**, s'écrit :

$$dm = \sigma\, dxdy$$

où $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$

$$I_{Cxy} = \int_{(m)} xydm = \sigma \int_0^a xdx \int_0^b xdy = \frac{mab}{4}$$

Donc, la matrice d'inertie au coin C de la plaque s'écrit :

$$I_C = m\begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}$$

3- Le moment d'inertie par rapport à la diagonale (Δ) de la plaque.
Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre du solide, est donné par la relation :

$$I_\Delta = \vec{n}^t\, I_O\, \vec{n}$$

Où :
$\vec{n}$ est le vecteur unitaire du vecteur de la diagonale (Δ);
$\vec{n}^t$ est le transposé du vecteur $\vec{n}$;
I_O le moment d'inertie par rapport au centre O.

Soit :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\vec{n}^{\,t} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$I_\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{m}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le moment d'inertie par rapport à la diagonale (Δ) est :

$$I_\Delta = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

EXERCICES SUPLEMENTAIRES

2.7. Le corps solide homogène dans la figure 2.19, est composé d'une sphère de centre C et de rayon R, d'une barre de longueur L et d'un demi-cylindre de rayon r. Déterminer le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe Oz.

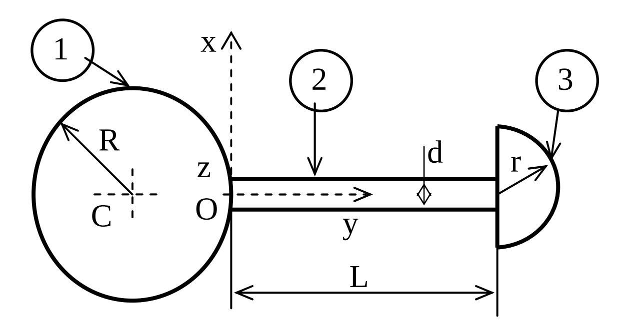


Figure 2.19

S.A. :

$$I^1_{zz} = \frac{2}{5}m_1R^2 + m_1R^2 = \frac{7}{5}m_1R^2$$

$$I^2_{zz} = \frac{m_2L^2}{12} + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m_2L^2}{3}$$

$$I^3_{zz} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{m_3r^2}{2}\right) - m_3\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2\right) + m_3\left(L + \frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$I^O_{ZZ} = I^1_{ZZ} + I^2_{ZZ} + I^3_{ZZ}$$

2.8. Déterminer les produits d'inertie $\mathbf{I_{xy}}$, $\mathbf{I_{xz}}$, $\mathbf{I_{zy}}$ par rapport au centre **O**, pour la figure 2.20, sachant que le corps solide homogène est composé de huit éléments identiques (barres) de longueur **l** et de masse **m**.

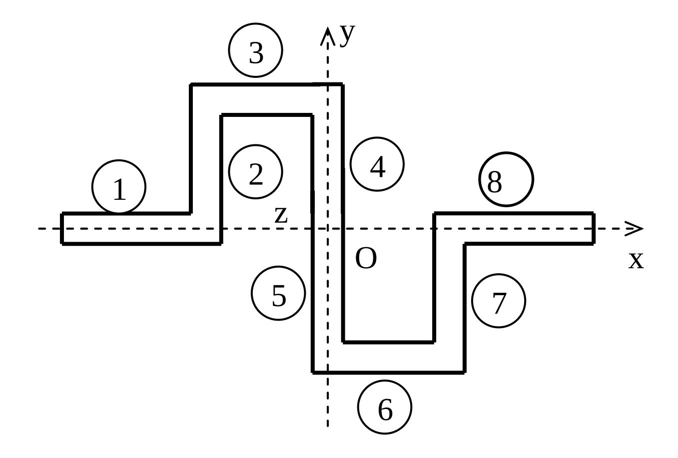


Figure 2.20

S.A. :

$\mathbf{I^O_{yz} = 0}$, $\mathbf{I^O_{xy} = 0}$, $\mathbf{I^O_{xz} = 2ml^2}$

2.9. Déterminer le centre de gravité du solide homogène (S) dans chacune des cas suivants:

a - (S) est un quart de plaque matérielle elliptique ;

b - (S) est une plaque formée d'une plaque triangulaire surmontée d'une demi plaque elliptique.

2.10. Un disque homogène, de rayon R, de centre O, de masse surfacique σ, est rapporté à deux axes orthogonaux Ox, Oy. Il subit un alésage qui le prive d'une partie circulaire de centre C et de rayon r ($r < R/2$) (figure 2.21). Calculer :

1-La masse du disque évidé ;

2- Les coordonnées de son centre de masse G ;

3- Le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz perpendiculaire au plan du disque

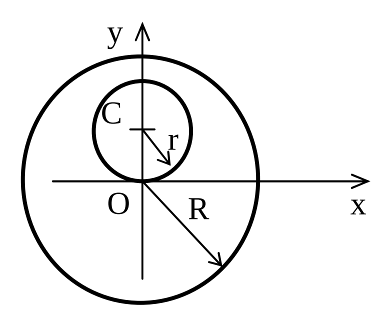


Figure 2.21

2.11. Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport au repère orthonormé (O, xyz), pour les solides (S) suivants, supposé tous homogènes et de masse **m**.

a - (S) est une sphère de centre O et de rayon R.
b - (S) est un cylindre creux de centre O et de rayon R. l'axe Oz est parallèle à la génératrice L.
c - (S) est un cercle de centre O et de rayon R. l'axe Oz est l'axe du cercle.
d - (S) est un cône de révolution, plein, de sommet O, de demi-angle au sommet α, de hauteur h, de rayon de base R. Oz est l'axe du cône

2.12. On considère le volume constitué du huitième (1/8) d'une sphère de masse volumique ρ. Calculer :

1- Les éléments de la matrice d'inertie en O, dans la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, en fonction de la masse **m** de ce volume et du rayon R ;
2- les coordonnées du centre de masse G.

2.13. Un cube homogène, de masse **m**, dont la longueur de son côté est **a,** tourne autour de l'axe (Δ) colinéaire à la diagonale **AB**, avec un taux de rotation ω.
- Déterminer le moment d'inertie par rapport à la l'axe (Δ) colinéaire à la diagonale **AB.**

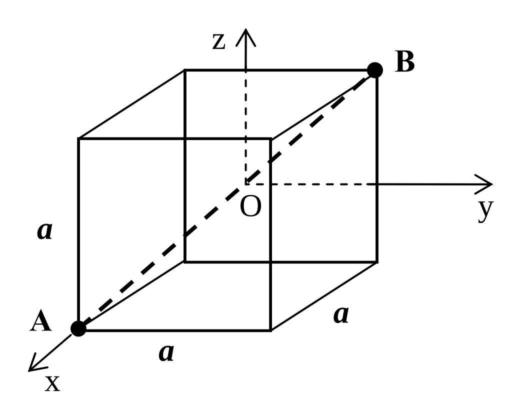


Figure 2.22

Chapitre 3 : CINÉMATIQUE

3.1. INTRODUCTION

La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle. Elle traite le mouvement mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ce mouvement. La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile.

3.2. CINÉMATIQUE DU POINT (Rappel)

3.2.1. Trajectoire, vitesse et accélération d'un point

3.2.1.1. Trajectoire :

Soit un point M repéré dans un référentiel $\mathbf{R}\ (\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe. Sa position est déterminée par le vecteur position à l'instant t (Figure 3.1.)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Où **x(t), y(t)** et **z(t)** sont les coordonnées du point M à l'instant t (Figure 3.1.)
M(t) est la position du point M à l'instant t
M' $(t+\Delta t)$ est la position du point M à l'instant $(t+\Delta t)$;
$\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement du point M.

(Γ) S'appelle trajectoire du mobile par rapport au référentiel.
- Si **(Γ)** est une droite, le mouvement du point est rectiligne;
- Si **(Γ)** est une courbe, le mouvement du point est curviligne.

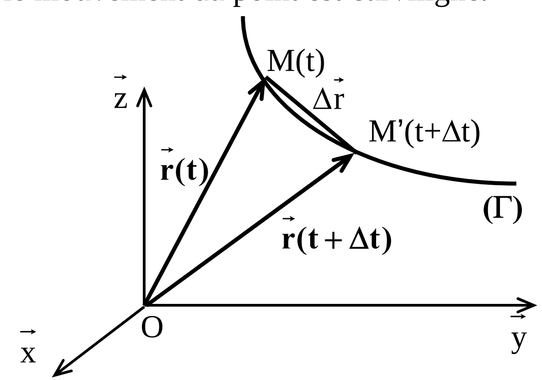


Figure 3.1. *Trajectoire d'un point*

3.2.1.2. Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse moyenne du mobile entre les deux instants est défini par :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse instantané est :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.2)$$

Ce vecteur est constamment tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement.

3.2.1.3. Vecteur accélération

Le vecteur accélération moyenne du mobile entre t et t+Δt est défini par :

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée est :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3.3)$$

3.2.2. Mouvement circulaire

Une particule M est animée d'un mouvement circulaire si, à tout instant **t**, elle est située en un point P appartenant à un cercle (c) de rayon **r** et de centre **O** (Figure 3.2). Choisissons un repère orthonormé d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, se trouvant dans le plan de la trajectoire circulaire.

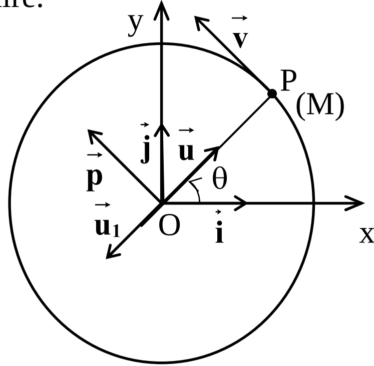


Figure 3.2. *Mouvement circulaire*

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$ (Figure 3.2), le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\,\vec{u} \qquad (3.4)$$

Soit l'angle de rotation $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$; supposons $\theta(t)$ deux fois dérivable. Le vecteur vitesse de la particule M au point P, est obtenu par la dérivation de (3.4).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{u}}{dt} = r\frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire $\vec{p}$, directement perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le plan, donc :

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{p} \qquad (3.5)$$

Il est convenu de représenter le vecteur vitesse $\vec{v}$ en prenant le point P pour origine, de même que pour le vecteur accélération. Sachant que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\vec{p}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire $\vec{u}_1$ opposé à $\vec{u}$, et directement perpendiculaire à $\vec{p}$ dans le plan:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}$$

On calcule, le vecteur accélération de la particule M au point P :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\left[-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{p}\right] = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{p} \qquad (3.6)$$

$\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire où le taux de rotation) ; noté $\dot{\theta}$ ou ω

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est l'accélération angulaire ; noté $\ddot{\theta}$

$r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est l'accélération tangentielle ; noté γ_t

$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ est l'accélération normale ; noté γ_n

Remarque :

Si **(s)** est l'abscisse curviligne de **P** sur le cercle, on a :

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

soit :

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{p} = \frac{ds}{dt}\vec{p}$$

$$\gamma_t = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\gamma_n = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{v^2}{R}$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{v^2}{R}\vec{u} + \frac{d^2s}{dt^2}\vec{p}$$

Où R est le rayon de courbure de la trajectoire en P; le centre de courbure est sur la normale orientée suivant $\vec{u}$ en P.

3.3. CINÉMATIQUE DU SOLIDE

3.3.1. Notion d'un solide parfait

Un solide (**S**) parfait, est un ensemble d'éléments matériels, dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points ne sont pas indépendantes. D'ici, la cinématique du solide traite la distribution des vitesses des points dans un corps, indépendamment des causes qui ont engendré le mouvement du solide.

3.3.2. Repérage d'un solide

On étudié le mouvement d'un point O du solide (S) par rapport à un observateur lié au référentiel R_0, comme le montre la Figure 3.3. Si ce mouvement n'est pas simple, il peut être avantageux de faire apparaître le mouvement de O par rapport à un repère intermédiaire R issu de O, et lié à (S).

On repère le mouvement de (O) en deux temps:

- Mouvement de (O) par rapport à R_0 (3 degrés de libertés)

- Mouvement autour de M considérée fixe, c'est à dire le mouvement de R par rapport à R_k (M est l'origine de R_k et ces axes sont couramment parallèles à ceux de R_0)

- On peut passer de R_k à R_0 par 3 rotations ordonnées au plus (3 degrés de liberté dans le mouvement de R par rapport à R_k)

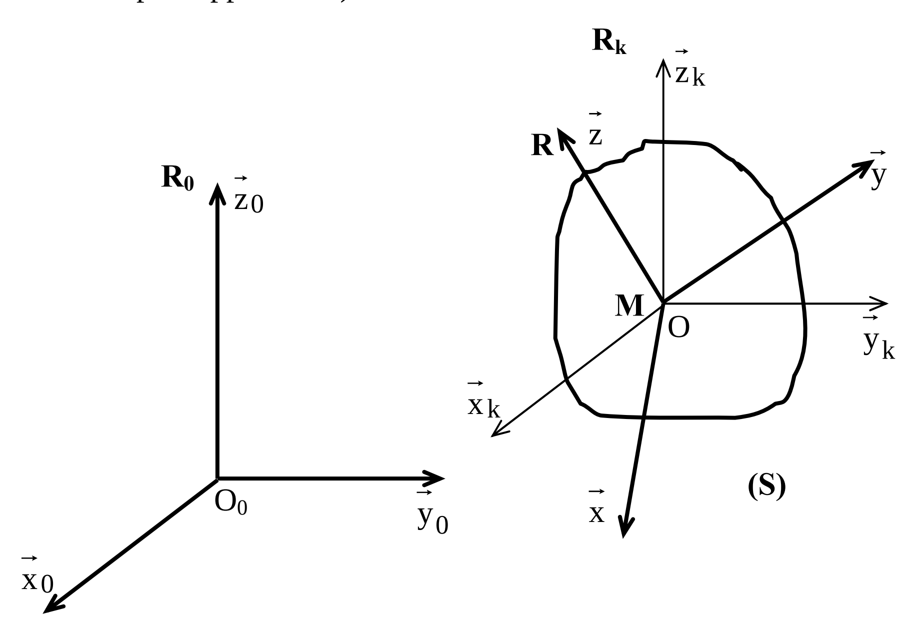


Figure 3.3. *Repérage d'un solide*

Le solide a donc au total 6 degrés de liberté. Son mouvement est entièrement repéré par les 3 coordonnées de **M** par rapport à R_0, et 3 angles. Pour cela, on considère le mouvement du solide (S) autour de O_0 comme fixe et l'origine du repère R_0. Ici, on considère que le point O coïncide avec O_0. Un tel mouvement peut être réalisé par une articulation sphérique. On peut transformer R en R_0 par trois rotations successives, qui définissent les angles d'Euler de type **I**.

3.3.3. Matrice de passage de R à R_0

Les angles d'Euler sont utilisés quand l'intersection des plans (O_0, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$) et (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$) existe. Cette intersection s'appelle ligne des noeuds. On passe du repère R_0 au repère R à l'aide de deux repères intermédiaires R_1 et R_2 qui seront définis par la suite.

3.3.3.1. Angle de précession

Un axe de R_1 est confondu avec R_0 ($\vec{z} = \vec{z}_0$). Soit u (O, $\vec{u}$) l'axe porté par la droite d'intersection des plans (O_0, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$) et (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$). L'angle de précession est définie par $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$ (Figure 3.4). On a alors un nouveau repère $\mathbf{R_1}$ **(O,** $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$).

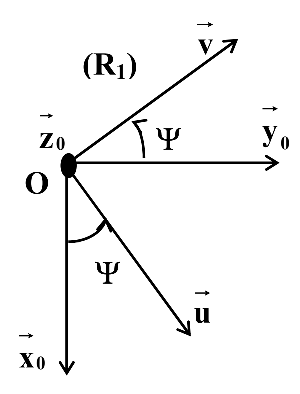


Figure 3.4. *Angle de précession*

Le vecteur taux de rotation de R_1 par rapport à R_0 est :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\psi}\vec{z}_0$$

Les nouveaux axes de R_1 sont définis par :

$$\vec{u} = \cos\Psi\,\vec{x}_0 + \sin\Psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{v} = -\sin\Psi\,\vec{x}_0 + \cos\Psi\,\vec{y}_0$$

3.3.3.2. Angle de nutation

On fait subir au repère R_1 une rotation autour de l'axe (O, $\vec{u}$). L'angle de nutation θ est défini par $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ (Figure 3.5). On a alors un nouveau repère $\mathbf{R_2}$ **(O,** $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$*).*

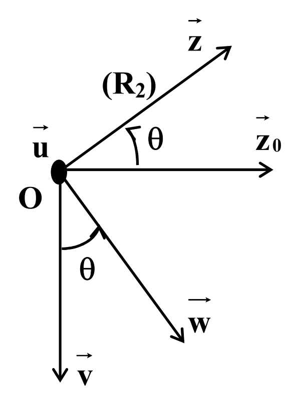


Figure3.5. *Angle de nutation*

Ce nouveau repère $\mathbf{R_2}$ est appelé repère de Résal. Le vecteur taux de rotation de $\mathbf{R_2}$ par rapport à $\mathbf{R_1}$ est :

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1)=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}=\dot{\theta}\vec{u}$$

Les axes de R_2 sont définis par :

$$\vec{w}=-\cos\theta\sin\Psi\,\vec{x}_0+\cos\theta\sin\Psi\,\vec{y}_0+\sin\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{z}=\sin\theta\sin\Psi\,\vec{x}_0-\sin\theta\cos\Psi\,\vec{y}_0+\cos\theta\,\vec{z}_0$$

3.3.3.3. Angle de rotation propre

On fait subir au repère $\mathbf{R_2}$ une rotation autour de l'axe $(O,\vec{z})$ (Figure 3.6). L'angle de rotation propre φ est défini par $\varphi=(\vec{u},\vec{x})$. On arrive au repère $\mathbf{R}$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

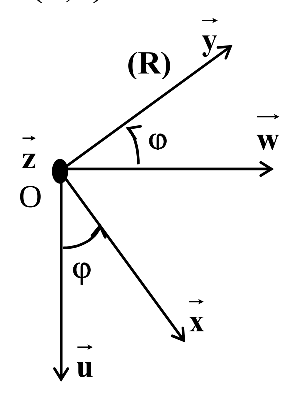


Figure 3.6. *Angle de rotation propre*

Le vecteur taux de rotation de **R** par rapport à $\mathbf{R_2}$ est :

$$\vec{\Omega}(R/R_2)=\frac{d\varphi}{dt}\vec{z}=\dot{\varphi}\vec{z}$$

Les axes de **R** sont définis par :

$$\vec{x}=\cos\varphi\,\vec{u}+\sin\varphi\,\vec{w}$$

$$\vec{y}=-\sin\varphi\,\vec{u}+\cos\varphi\,\vec{w}$$

La matrice de passage de **R** à $\mathbf{R_0}$ est indiquée dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1. *Matrice de passage de **R** à $\mathbf{R_0}$*

	$\vec{x}_0$	$\vec{y}_0$	$\vec{z}_0$
$\vec{x}$	cosφ cosψ –cosθ sinφ sinψ	cosφ sinψ + cosθ sinφ cosψ	sinθ sinφ
$\vec{y}$	-sinφ cosψ –cosθ cosφ sinψ	-sinφ sinψ + cosθ cosφ	sinθ cosφ
$\vec{z}$	sin θ sin ψ	- sin θ cos ψ	cos θ

Le vecteur taux de rotation instantané de **R** par rapport à $\mathbf{R_0}$ s'écrit :

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}/\mathbf{R_0}) = \dot{\psi}\,\vec{\mathbf{z}}_0 + \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{u}} + \dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{z}}$$

Ce vecteur s'écrit différemment suivant qu'il est exprimé sur $\mathbf{R_0}$ où sur **R** :

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}/\mathbf{R_0}) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Où

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}/\mathbf{R_0}) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La Figure 3.7 résume le passage du repère R au repère R_0 par les trois angles d'Euler de type **I**.

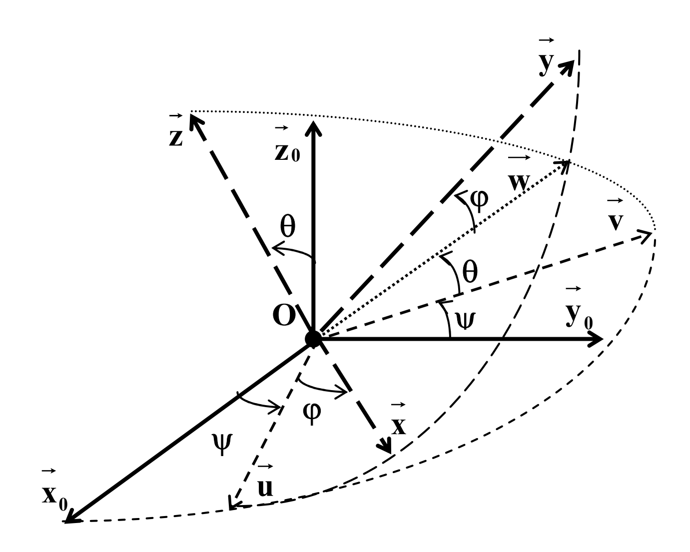


Figure 3.7. *Angles d'Euler type* **I**

3.3.4. Torseur cinématique – distribution des vitesses

3.3.4.1. Champ des vitesses d'un solide en mouvement

A chaque point du solide (S), on peut associer son vecteur vitesse défini par :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{OA}}{dt} \tag{3.7}$$

La définition d'un solide parfait entraîne que la dérivée par rapport au temps de la distance entre deux de ses points quelconques A et B est nulle :

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\,\overrightarrow{AB}.\left(\vec{V}_B - \vec{V}_A\right) = 0$$

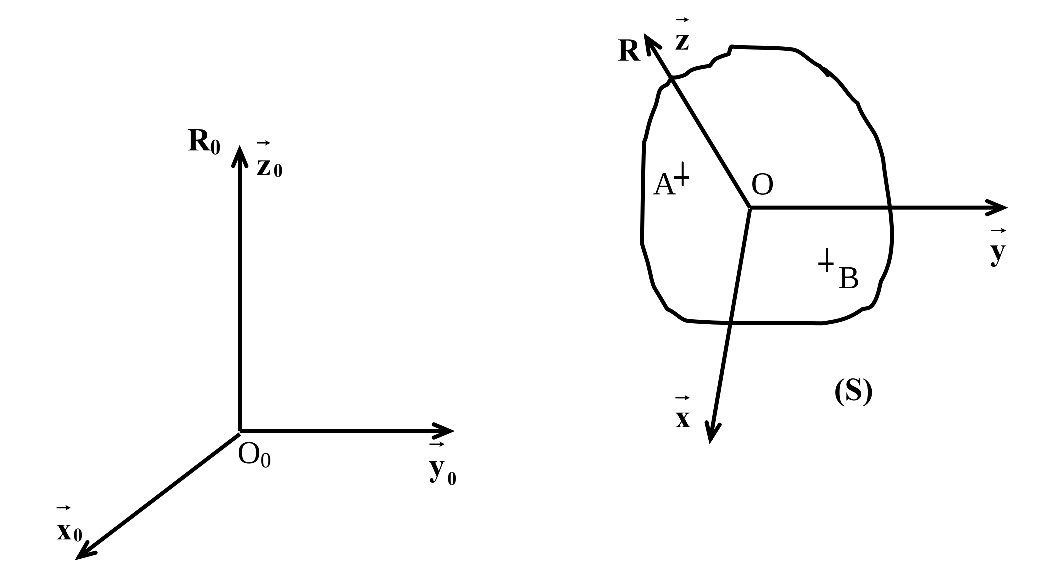


Figure 3.8. *Champ des vitesses d'un solide en mouvement*

Cherchons la relation entre $\vec{V}_{A/R_0}$ et $\vec{V}_{B/R_0}$

D'après la formule de dérivation d'un vecteur (page 8) :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OB}$$

D'où :

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^{R}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^R\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or $\overrightarrow{AB} = \text{constante} \Rightarrow \dfrac{d^R\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = 0$

Par conséquent :

$$\vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (3.8)$$

C'est la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable en mouvement. Elle montre que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique.

3.3.4.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique exprimé au point A du solide **(S)** dans son mouvement par rapport au repère $\mathbf{R_0}$, est défini par :

$$\left(V_{S/R_0}\right)_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}_{A/R_0} \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

Le vecteur libre $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ est le vecteur taux de rotation instantané du solide **(S)** par rapport au repère $\mathbf{R_0}$ et $\vec{V}_{A/R_0}$ est le vecteur vitesse du point A appartenant au solide **(S)** par rapport au repère $\mathbf{R_0}$.

3.3.4.3. Champ des accélérations d'un solide en mouvement

A chaque point du solide (S), on peut associer son vecteur accélération défini par :

$$\vec{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{B/R_0}}{dt} \qquad (3.10)$$

Sachant que :

$$\forall (A, B) \in (S) \qquad \vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{B/R_0}}{dt} = \frac{d^{R_0}\left(\vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{A/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0}\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \frac{d^{R_0}\overrightarrow{AB}}{dt}$$

Or

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{AB}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{AB}}{dt}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{AB}$$

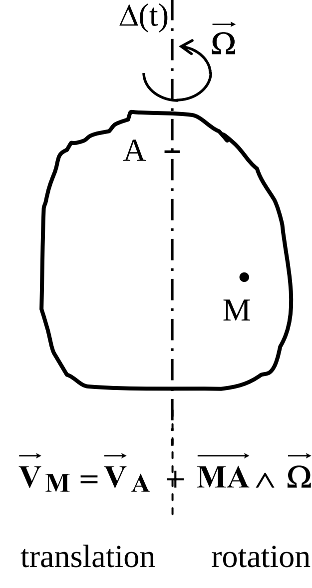
$$\vec{a}_{B/R_0}=\frac{d^{R_0}\vec{V}_{A/R_0}}{dt}+\frac{d^{R_0}\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt}\wedge\overrightarrow{AB}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{AB}\right) \qquad (3.11)$$

C'est la Formule de Rivals ou loi de distribution des accélérations dans un corps solide indéformable.

3.3.5. Axe instantané de rotation

On appelle axe instantané de rotation l'axe central du torseur cinématique. Cet axe est donc le lieu des points dont les vitesses sont parallèles au vecteur taux de rotation instantané.

A tout instant, le mouvement du solide (Figure 3.9) peut être considéré comme la composition d'une rotation autour de l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ de vitesse $\vec{\Omega}$ et d'une translation instantanée le long de l'axe instantané de rotation de vitesse $\vec{V}_A$, A étant un point de l'axe.



$$\vec{V}_M=\vec{V}_A+\overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}$$

translation rotation

Figure 3.9. *Mouvement général d'un solide*

Nous avons vu que l'axe central d'un torseur est le lieu des points où les moments sont minimaux. Donc, si un solide possède au moins deux points de vitesses nulles, l'axe instantané de rotation passe obligatoirement par ces deux points.

3.3.6. Cas particulier de mouvements

3.3.6.1. Mouvement de translation

Pour un mouvement de translation, à un instant donné, les vecteurs vitesses de tous les points du solide sont égaux et le vecteur taux de rotation est nul (Figure 3.10.).

$$\vec{\Omega}=\vec{0},\ \vec{V}_A=\vec{V}_B \quad \forall(A,B)\in \text{Solide} \qquad (3.12)$$

Si les trajectoires des points du solide sont rectilignes (figure 3.10), nous parlerons de translation rectiligne. Si, de plus, leurs vitesses respectives sont constantes au cours du temps, nous aurons une translation rectiligne uniforme.

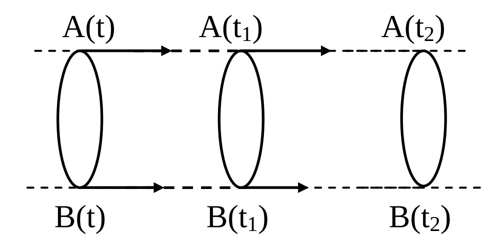


Figure 3.10. *Mouvement de translation rectiligne*

3.3.6.2. Mouvement de rotation autour d'un axe

Le solide en rotation possède une liaison rotoïde ou pivot avec le solide de référence: chaque point du solide décrit alors une trajectoire circulaire autour de l'axe du rotoïde constituant l'axe instantané de rotation (Figure 3.11).

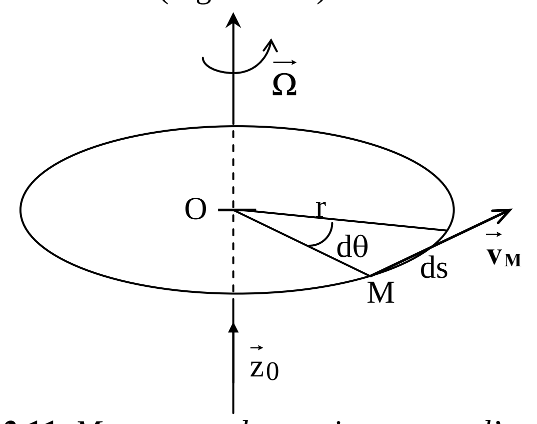


Figure 3.11. *Mouvement de rotation autour d'un axe*

Si O appartient à l'axe fixe du vecteur directeur $\vec{z}_0$, on a alors :

$$\vec{v}_M = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}$$

Cela est possible si $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{z}_0$ est colinéaire à $\vec{z}_0$,

Or par définition, nous avons :

$$\left\|\vec{v}_M\right\| = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$$

et :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

Si un solide est soumis à la rotation autour d'un axe de vecteur directeur $\vec{z}_0$ à une vitesse $\dot{\theta}$ dans le sens direct, le vecteur taux de rotation instantané de ce solide s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \tag{3.13}$$

3.3.6.3. Mouvement hélicoïdal

Ce mouvement est la superposition d'une rotation autour d'un axe et une translation suivant ce même axe. C'est le cas, par exemple, du mouvement d'une vis dans un écrou. D'après la figure 3.9, le vecteur vitesse du point M s'écrit :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega} \tag{3.14}$$

Avec :

$\vec{V}_A$ le vecteur vitesse de translation du point A, qui représente le mouvement de translation ;

et $\vec{\Omega}$ le vecteur taux de rotation instantané, qui représente le mouvement de rotation.

3.4. COMPOSITION DE MOUVEMENTS

3.4.1. Dérivation composée (Rappel)

Soit le repère orthonormé **R (O, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$)** lié au solide (Figure 3.12.), et un repère fixe **R_0(O_0, $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$).**

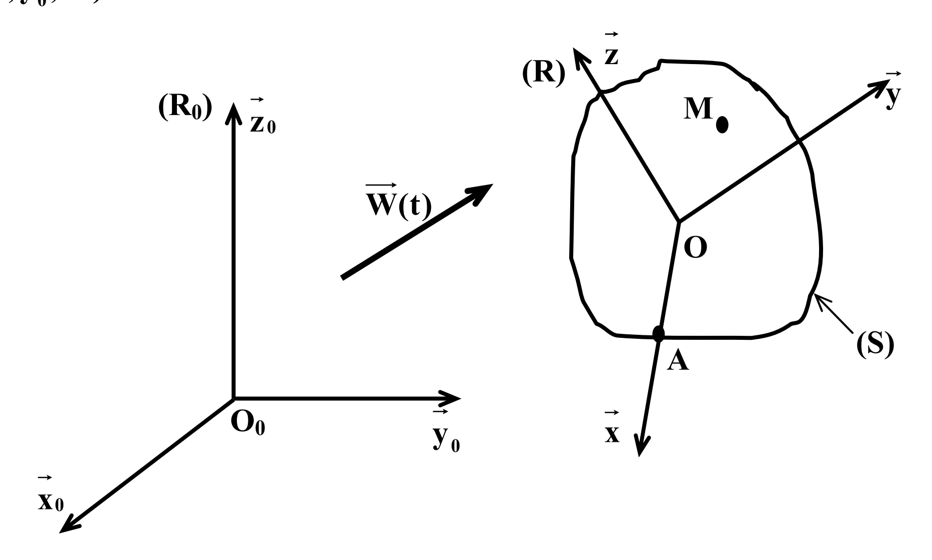


Figure 3.12. *Composition de mouvements*

On détermine l'expression de la dérivée de ($\frac{d\vec{x}}{dt}$) par rapport au temps t.

Soit **A** le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$, on peut alors écrire :

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0}$$

Or,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_O} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} = -\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x}$$

On a donc, plus généralement, la formule de base mobile :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x} \\ \frac{d\vec{y}}{dt} &= \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y} \\ \frac{d\vec{z}}{dt} &= \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{z} \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Soit un vecteur $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}(t)$ représentatif d'une grandeur physique variable dans les repères $\mathbf{R_0}$ et $\mathbf{R}$ (Figure 3.12) et dans le temps.

Soient x_0, y_0 et z_0 les composantes de $\overrightarrow{W}$ dans $\mathbf{R_0}$ au temps t, on écrit :

$$\overrightarrow{W}(t) = x_0(t)\vec{x}_0 + y_0(t)\vec{y}_0 + z_0(t)\vec{z}_0$$

Soient x, y et z les composantes de $\overrightarrow{W}$ dans $\mathbf{R}$ au temps t:

$$\overrightarrow{W}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

On appelle dérivée de $\overrightarrow{W}(t)$ par rapport à t dans les repères $\mathbf{R_0}$ et $\mathbf{R}$ respectivement :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \dot{x}_0(t)\vec{x}_0 + \dot{y}_0(t)\vec{y}_0 + \dot{z}_0(t)\vec{z}_0$$

Et,

$$\frac{d^{R}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{x} + \dot{y}(t)\vec{y} + \dot{z}(t)\vec{z}$$

La dérivée de $\overrightarrow{W}(t)$ exprimé dans le repère $\mathbf{R}$ par rapport à t et par rapport à $\mathbf{R_0}$ s'écrit:

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W}(t)}{dt} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} + x\frac{d^{R_0}\vec{x}}{dt} + y\frac{d^{R_0}\vec{y}}{dt} + z\frac{d^{R_0}\vec{z}}{dt}$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W(t)}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{W(t)}}{dt}+x\frac{d^{R_0}\vec{x}}{dt}+y\frac{d^{R_0}\vec{y}}{dt}+z\frac{d^{R_0}\vec{z}}{dt}$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W(t)}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{W(t)}}{dt}+x\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{x}\right)+y\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{y}\right)+z\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{z}\right)$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W(t)}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{W(t)}}{dt}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\left(x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}\right)$$

D'où la règle de dérivation composée ou règle de dérivation dans un repère mobile :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{W(t)}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{W(t)}}{dt}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{W(t)} \qquad (3.16)$$

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{W(t)}=\vec{\Omega}_{S/R_1}$, nous remarquons que :

$$\frac{d^{R_1}}{dt}\vec{\Omega}_{S/R_1}=\frac{d^{R}}{dt}\vec{\Omega}_{S/R_1}$$

3.4.2. Composition de vitesses

Soit **R_0** le repère absolu et **R** le repère relatif.

Le vecteur vitesse absolue d'un point M quelconque (non forcément lié au solide, figure 3.11), sera noté :

$$\vec{V}_{M/R_0}=\frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt}$$

Le vecteur vitesse relative d'un point M du solide (S) sera noté dans le repère **R** :

$$\vec{V}_{M/R}=\frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur position absolu du point M par rapport au repère R_0 est noté :

$$\overrightarrow{O_0M}=\overrightarrow{O_0O}+\overrightarrow{OM}$$

D'où

$$\vec{V}_{M/R_0}=\frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt}=\frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0O}}{dt}+\frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

En tenant compte de la relation (3.16) qui donne la dérivée d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe, on écrit :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{O\in S/R_0} + \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Cette relation devient :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O\in S/R_0} + \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \qquad (3.17)$$

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

Le vecteur vitesse absolue $\vec{V}_{M/R_0}$ est le vecteur vitesse du point M pour un observateur lié au repère absolu (fixe) $\mathbf{R_0}$. Cette vitesse peut être décomposée en deux parties :

- La vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}_{M/R}$$

C'est la vitesse du point M pour un observateur lié au repère relatif (mobile) R.

- La vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O\in S/R_0} + \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

C'est la vitesse du point M appartenant à R_0 et qui coïncide à l'instant t avec le point M.

3.4.3. Composition d'accélérations

- Accélération absolue

On notera le vecteur accélération absolue :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{2R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt^2} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R_0}}{dt}$$

On a alors pour simplifier l'écriture $\left(\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}\right)$:

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \frac{d^{R_0}\left(\vec{V}_{O\in S/R_0} + \vec{V}_{M/R} + \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{O\in S/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_0}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

En tenant compte de la relation (3.16) de la dérivée d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe, le vecteur accélération absolue du point M, s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{O\in S/R_0} + \left(\frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R} \right) + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$$

Nous pouvons donc le réécrire sous la forme :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{O\in S/R_0} + \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \qquad (3.18)$$

Ou bien :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M) + + \vec{a}_e(M)$$

Cette accélération absolue peut être décomposée en trois parties :

- l'accélération relative :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R}$$

C'est le vecteur accélération du point M pour un observateur lié au repère relatif R.

- l'accélération d'entraînement (accélération de M par rapport à R_0 si M est supposé fixe dans R) :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O\in R/R_0} + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Elle s'obtient aussi par l'application de la formule de **Rivals** (3.11) entre O et M, rigidement lié à O dans le mouvement d'entraînement.

- L'accélération complémentaire où de Coriolis :

$$\vec{a}_c(M) = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right)$$

L'accélération de Coriolis est nulle si et seulement si :

- le vecteur taux de rotation du repère relatif par rapport au repère absolu est nul : $\vec{\Omega} = \vec{0}$
- la vitesse relative du point considéré est nulle : $\vec{V}_r(M) = \vec{V}_{M/R} = \vec{0}$
-la vitesse relative est colinéaire au vecteur taux de rotation: $\vec{\Omega} \,//\, \vec{V}_{M/R}$

3.5. LES LIAISONS

3.5.1. Définitions

Les liaisons entre les solides diminuent le nombre de degrés de liberté. Pour décrire le mouvement de n solides libres dans l'espace à trois dimensions, il faut **6n** paramètres (3 translations + 3 rotations par solide). Chaque liaison est affectée d'un ou plusieurs degrés de liaison.

Si l'on a **k** degrés de liaison, le nombre de degrés de liberté est égal alors à :

Nombre de degrés de liberté = 6n – k

3.5.2. Solides en contact ponctuel

3.5.2.1. Vitesse de glissement

Le vecteur vitesse de glissement d'un solide (S_2) par rapport à un solide (S_1) comme montre la Figure 3.13, est :

$$\vec{V}_{g(S_2/S_1)} = \vec{V}_{I_2 \in S_2} - \vec{V}_{I_1 \in S_1}$$

On remarque que $\vec{V}_{g(S_2/S_1)}$ est la vitesse de I_2 par rapport à un repère lié à (S_1) et que $\vec{V}_{g(S_2/S_1)}$ est contenue dans un plan tangent aux solides en I.

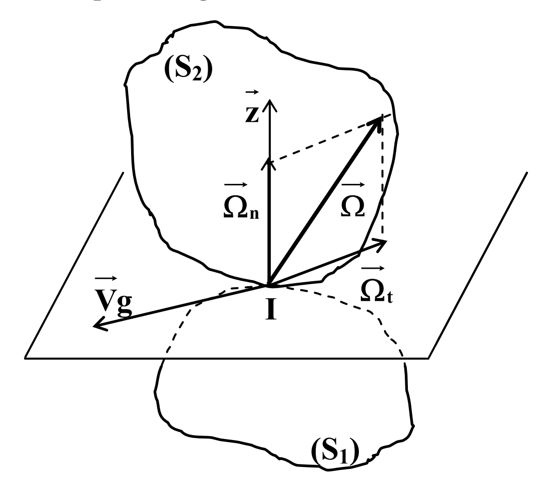


Figure 3.13. *Solides en contact ponctuel*

3.5.2.2. Plan tangent

Le point $\left(\mathbf{I}, \vec{V}_g\right)$ est toujours contenu dans le plan tangent entre **(S_2)** et **(S_1)**. Sinon, il y aurait éloignement des solides ou pénétration de l'un dans l'autre.

3.5.2.3. Roulement sans glissement

Il y a roulement sans glissement si $\vec{V}_g = \vec{0}$. Dans ce cas, **I** appartient à l'axe instantané de rotation qui est alors défini par $\left(\mathbf{I}, \vec{\Omega}\right)$

Dans le cas de roulement sans glissement, on a :

$$\vec{V}_{g(S_2/S_1)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{I_1 \in S_1} = \vec{V}_{I_2 \in S_2} \tag{3.19}$$

La condition de roulement sans glissement est intéressante pour trouver la relation existante entre le vecteur taux de rotation instantané du solide et la vitesse d'un de ses points.

3.5.2.4. Roulement et Pivotement

On appellera $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ le vecteur taux de rotation instantané de **(S_2)** par rapport à **(S_1)**, on écrit :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2) - \vec{\Omega}(S_1) \tag{3.20}$$

On peut décomposer le vecteur $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ en deux vecteurs (Figure 3.13) :

- $\vec{\Omega}_t$, situé dans le plan tangent en I aux deux solides, est le vecteur taux de rotation instantanée de **roulement** de **(S_2)** par rapport à **(S_1)** ;

- $\vec{\Omega}_n$, situé dans le plan normale en I au plan tangent, est le vecteur taux de rotation instantanée de **pivotement** de **(S_2)** par rapport à **(S_1).**

3.6. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

3.6.1. Définition

Un mouvement plan sur plan représente le mouvement d'une figure plane (section d'un solide par exemple) qui reste parallèle à un plan fixe P_0 et à une distance constante (Figure 3.14).

Tous les vecteurs vitesses de la figure plane considérée sont parallèles au plan P_0. On ramène l'étude du mouvement de la figure plane considérée au mouvement de sa projection sur P_0.

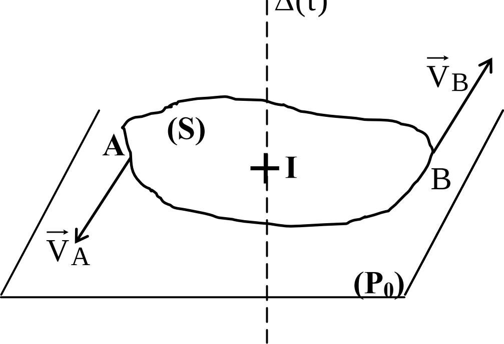


Figure 3.14. *Mouvement plan sur plan*

Le mouvement de tout point du solide est déterminé dès que l'on connaît le mouvement de sa projection dans le plan de référence.

3.6.2. Centre instantané de rotation (CIR)

Soient deux points A et B d'un solide (S) en mouvement plan sur plan (Figure 3.14), et les vecteurs vitesses $\vec{V}_A$ **et** $\vec{V}_B$ appartiennent au plan P_0. D'après la loi de distribution des vitesses $\left(\vec{V}_A = \vec{V}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}\right)$, le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$ appartient aussi au plan P_0. Le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ est donc normal au plan P_0, ce qui signifie que l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ est perpendiculaire à P_0. Or, par définition, tous les points de l'axe instantané de rotation ont une vitesse parallèle à cet axe. De plus, dans le cas d'un mouvement plan sur plan, les vitesses sont parallèles au plan P_0. Par conséquent, le point d'intersection entre le plan P_0 et l'axe instantané de rotation a une vitesse nulle. Ce point est appelé **centre instantané de rotation (CIR).**

EXERCICES RESOLUS

3.1. Soit une tige (**T**) homogène de longueur R, d'extrémités O et A. Cette tige est en rotation autour d'un axe fixe **(O, $\vec{z}_1$),** par un angle de rotation θ (Figure 3.15), dans le repère fixe **R_1 (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$).** Le repère **$R_T$ (A, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1$)** est lié à la tige, tel que $\overrightarrow{OA} = R\vec{u}$.

- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point A, en utilisant la méthode de dérivation directe et la méthode de distribution des vitesses.

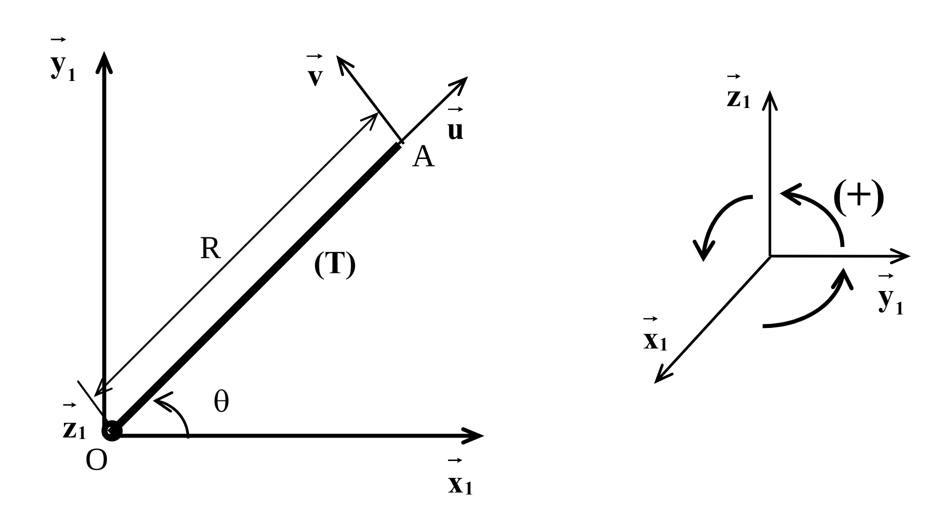


Figure 3.15.

Solution:

Détermination des vecteurs vitesse et accélération du point A :

Nous avons :

L'angle de rotation de la tige autour de l'axe $\vec{z}_1$: θ;

Et le vecteur position du point A : $\overrightarrow{OA} = R\vec{u}$

1- la méthode de dérivation directe :

Le vecteur vitesse du point A par rapport à R_1 est défini par :

$$\vec{V}_{A/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^{R_1}R\vec{u}}{dt} = R\frac{d^{R_1}\vec{u}}{dt}$$

Sachant que :

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{x}_1 + \sin\theta\vec{y}_1$$
$$\vec{v} = -\sin\theta\vec{x}_1 + \cos\theta\vec{y}_1$$

La dérivée du vecteur unitaire mobile $\vec{u}$ est :

$$\frac{d^{R_1}\vec{u}}{dt}=\frac{d\cos\theta}{dt}\vec{x}_1+\frac{d\sin\theta}{dt}\vec{y}_1=-\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{x}_1+\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{y}_1=\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{x}_1+\cos\theta\,\vec{y}_1\right)=\dot{\theta}\,\vec{v}$$

Donc, le vecteur vitesse du point A à l'extrémité de la tige s'écrit :

$$\vec{V}_{A/R_1}=R\dot{\theta}\,\vec{v}$$

Et le vecteur accélération du point A est:

$$\vec{a}_{A/R_1}=\frac{d^{R_1}\vec{V}_{A/R_1}}{dt}=\frac{d^{R_1}\left(R\dot{\theta}\vec{v}\right)}{dt}=R\frac{d^{R_1}\left(\dot{\theta}\,\vec{v}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{A/R_1}=R\left(\vec{v}\frac{d^{R_1}\dot{\theta}}{dt}+\dot{\theta}\frac{d^{R_1}\vec{v}}{dt}\right)$$

Soit :

$$\vec{a}_{A/R_1}=R\left(\ddot{\theta}\,\vec{v}-\dot{\theta}^2\vec{u}\right)$$

2- Méthode de distribution des vitesses dans un corps solide :

Le taux de rotation de la tige autour de l'axe $\vec{z}_1$ est :

$$\vec{\Omega}_{T/R_1}=\frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1=\dot{\theta}\,\vec{z}_1$$

D'après la formule **de distribution des vitesses dans un corps solide**, on écrit dans le point A :

$$\vec{V}_{A/R_1}=\vec{V}_{O/R_1}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où, $\vec{V}_{O/R_1}=\vec{0}$, (O point fixe, centre de rotation de la tige).

D'ici :

$$\vec{V}_{A/R_1}=\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}=-R\vec{u}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1=R\dot{\theta}\,\vec{v}$$

On déduit le torseur cinématique au point A :

$$[V]_A=\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{T/R_1}\\ \vec{V}_{A/R_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\,\vec{z}_1\\ R\dot{\theta}\,\vec{v}\end{pmatrix}$$

-le vecteur accélération du point A s'écrit :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{A/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}\right)}{dt}$$

et, la dérivée d'un vecteur mobile, par rapport au repère fixe, s'écrit :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}$$

Donc, on retrouve la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \vec{a}_{O/R_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{T/R_1}}{dt} + \left(\vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

On remplaçant les vecteurs $\vec{a}_{O/R_1}$, $\overrightarrow{AO}$, et $\vec{\Omega}_{T/R_1}$ par ces expressions, on obtient :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \vec{0} - R\vec{u} \wedge \frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt} + \left(\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -R\vec{u}\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

D'où, on retrouve le vecteur accélération du point A comme suit :

$$\vec{a}_{A/R_1} = R\ddot{\theta}\vec{v} - R\dot{\theta}^2\vec{u}$$

3.2. On considère le roulement d'un disque de centre C et de rayon **r** sur un axe (O, $\vec{x}_1$).
Le repère R (C, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est lié au disque (Figure 3.16).
- Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque ;
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque ;
- Écrire la condition de roulement sans glissement au point de contact **I** avec l'axe (O, $\vec{x}_1$).

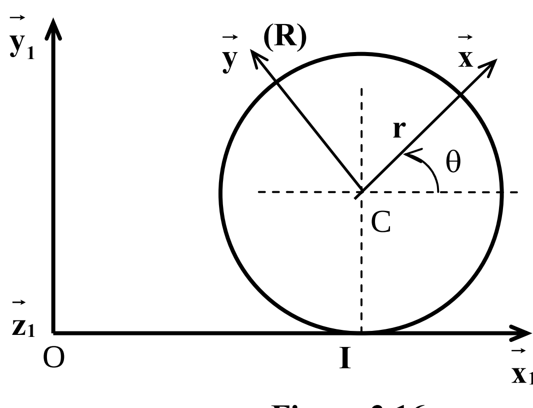


Figure 3.16.

Solution :

1- Le torseur cinématique au centre C du disque :

Le disque est en mouvement hélicoïdal (rotation + translation)
θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Cz_1, donc, le taux de rotation est (Figure 3.16) :

$$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1$$

Le déplacement du disque de **O** jusqu'au point de contact **I**, est égal à **x**, donc, la vitesse de translation du point **C** est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{O_1C}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IC}\right)}{dt} = \frac{d\left(x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1\right)}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

Par conséquent, le torseur cinématique du centre C du disque est :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{C/R_1} \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

2- Les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque :

Appliquons la règle de distribution des vitesses dans un corps solide dans le point M :

$$\vec{V}_{M/R_1} = \vec{V}_C + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}$$

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 - r\,\vec{x} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\vec{y}$$

On exprime $\vec{V}_{M/R_1}$ dans le repère fixe :
Sachant que :

$$\vec{x} = \cos\theta\,\vec{x}_1 + \sin\theta\,\vec{y}_1$$
$$\vec{y} = -\sin\theta\,\vec{x}_1 + \cos\theta\,\vec{y}_1$$

Donc,

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{x}_1 + \cos\theta\,\vec{y}_1\right)$$

Le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{C/R_1} + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\left(\overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{M/R_1} = = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \overrightarrow{MC} \wedge \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt} = \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC}$$

D'où, la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{C/R_1} + \overrightarrow{MC} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + \left(\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

On remplaçant $\vec{a}_{C/R_1}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\vec{\Omega}_{C/R_1}$ par ces expressions dans $\vec{a}_{M/R_1}$, on obtient :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 - r\,\vec{x} \wedge \frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt} + \left(\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -r\,\vec{x}\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

Donc, Le vecteur accélération du point M, s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 + r\ddot{\theta}\vec{y} - r\dot{\theta}^2\vec{x}$$

3- La condition de roulement sans glissement au point de contact **I** avec l'axe (O, $\vec{x}_1$) :

Le vecteur vitesse du point de contact **I** :
Lorsque le point M coïncide avec le point de contact I, on aura :

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ et } \vec{y} = \vec{x}_1$$

C'est-à-dire que :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{M/R_1}(\theta = \frac{3\pi}{2})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\,\dot{\theta}\,\vec{x}_1 = \left(\dot{x} + r\,\dot{\theta}\right)\vec{x}_1$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I, est la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ nulle, c'est-à-dire :

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right)\vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right) = 0$$

3.3. Un train d'engrenages est constitué par trois roues dentées **I, II,** et **III,** de rayon respectifs R_1, R_2, et R_3, et dont les centres O, A et B restent alignés sur le bras OB tournant autour de Oz dans le plan (Ox, Oy) avec un taux de rotation $\vec{\Omega}_t$ (Figure 3.17). La roue dentée I étant fixe dans le plan (ox, oy), on demande de calculer les taux de rotations dans les trois roues. En déduire le vecteur vitesse au point C de la roue **III**.

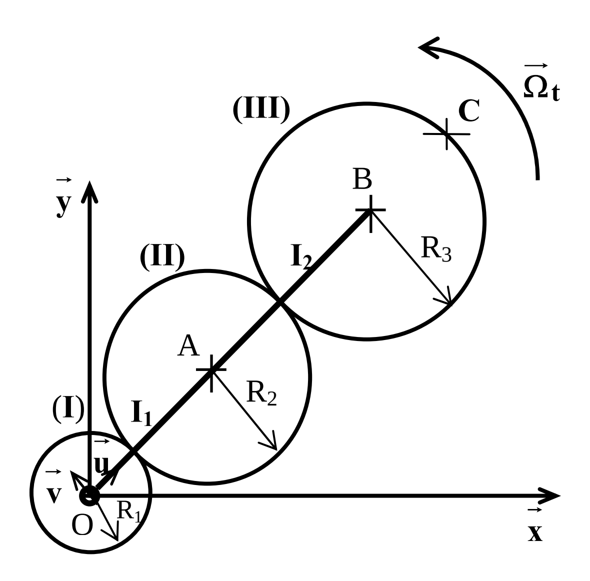


Figure 3.17.

Solution :

Détermination des taux de rotation des roues **I, II** et **III**.
La roue **I** étant fixe, donc le taux de rotation de la roue **I** est nul, où :

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{0}$$

- Le taux de rotation de la roue II, $\vec{\Omega}_2$:
Considérons le contact entre la roue **I** et **II,** et puisque ces roues sont dentées, on aura dans le point de contact $\mathbf{I_1}$ l'égalité des vitesses (Figure 3.17) :

$$\vec{V}_I(I_1) = \vec{V}_{II}(I_1)$$

Or :

$\vec{V}_I(I_1) = \vec{0}$, car la roue **I** étant fixe.

et,

$$\vec{V}_{II}(I_1) = \vec{V}_{A/O} + \overrightarrow{I_1A} \wedge \vec{\Omega}_2$$

Puisque la tige est en rotation autour de l'axe Oz, avec le taux de rotation $\vec{\Omega}_t$, la vitesse du point A est :

$$\vec{V}_{A/O} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_t = -(R_1 + R_2)\vec{u} \wedge \Omega_t \vec{z} = (R_1 + R_2)\Omega_t \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_1A} \wedge \vec{\Omega}_{II} = R_2\, \vec{u} \wedge \Omega_2 \vec{z} = -R_2\, \Omega_2 \vec{v}$$

D'où,

$$\vec{V}_{II}(I_1) = \left((R_1 + R_2)\Omega_t - R_2\Omega_2\right)\vec{v}$$

Puisque :

$$\vec{V}_{II}(I_1) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \left((R_1 + R_2)\Omega_t - R_2\Omega_2\right) = 0$$

Donc, le taux de rotation de la roue **II** est :

$$\Omega_2 = \frac{(R_1 + R_2)}{R_2}\,\Omega_t$$

Le taux de rotation de la roue III, $\vec{\Omega}_3$:

Puisque les roues **II** et **III** sont dentées, on aura dans le point de contact $\mathbf{I_2}$ l'égalité des vitesses :

$$\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{III}(I_2)$$

Or,

$$\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{A/O} + \overrightarrow{I_2A} \wedge \vec{\Omega}_2$$

Avec :

$$\vec{V}_{A/O} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_t = -(R_1 + R_2)\vec{u} \wedge \Omega_t\, \vec{z} = (R_1 + R_2)\Omega_t\, \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_2A} \wedge \vec{\Omega}_2 = -R_2\, \vec{u} \wedge \Omega_2 \vec{z} = +R_2\, \Omega_2 \vec{v}$$

D'où

$$\vec{V}_{II}(I_2) = \left((R_1 + R_2)\Omega_t + R_2\Omega_2\right)\vec{v} = 2\left((R_1 + R_2)\Omega_t\right)\vec{v}$$

D'autre part :

$$\vec{V}_{III}(I_2) = \vec{V}_{B/O} + \overrightarrow{I_2B} \wedge \vec{\Omega}_3$$

Le point B est aligné sur le bras OB tournant avec $\vec{\Omega}_t$, d'où le vecteur vitesse du point B qui s'écrit :

$$\vec{V}_{B/O} = \overrightarrow{BO} \wedge \Omega_t \vec{z} = -(R_1 + 2R_2 + R_3)\vec{u} \wedge \Omega_t \vec{z} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_2B} \wedge \vec{\Omega}3 = +R_3 \vec{u} \wedge \Omega_3 \vec{z} = -R_3 \Omega_3 \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{V}_{III}(I_2) = \left((R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t - R_3\Omega_3\right)\vec{v}$$

De la relation $\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{III}(I_2)$ ci-dessus, on écrit :

$$2\left((R_1 + R_2)\Omega_t\right)\vec{v} = \left((R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t - R_3\Omega_3\right)\vec{v}$$

Par conséquent, le taux de rotation de la roue **III** s'obtient :

$$\Omega_3 = \frac{(R_3 - R_1)}{R_3}\Omega_t$$

- Le vecteur vitesse du point **C** , $\vec{V}_{C/O}$, s'écrit :

$$\vec{V}_{C/O} = \vec{V}_{B/O} + \overrightarrow{CB} \wedge \Omega_3 \vec{z}$$

Nous avons :

$$\vec{V}_{B/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

Et :

$$\overrightarrow{CB} \wedge \Omega_3 \vec{z} = -R_3 \vec{u} \wedge \left(\frac{R_3 - R_1}{R_3}\right)\Omega_t \vec{z} = (R_3 - R_1)\Omega_t \vec{v}$$

D’où :

$$\vec{V}_{C/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v} + (R_3 - R_1)\Omega_t \vec{v}$$

On en déduit :

$$\vec{V}_{C/O} = 2(R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

3.4. On considère la roue (**D**), de centre C et de rayon R (Figure 3.18), située dans un plan vertical mobile et est solidaire à la tige CH. L'ensemble (Roue + tige) tourne autour de CH avec un angle de rotation φ. La tige **CH** elle même est liée à l'axe fixe **(O, $\vec{z}_1$)** par un pivot glissant d'axe **(H, $\vec{z}_1$)** et tourne autour de lui par un angle ψ . Sachant que la distance **CH = ρ** est considérée comme variable, et la roue (**D**) effectue un roulement sans glissement sur le plan de contact **R_1 (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1$).** Ecrire la condition de roulement sans glissement de la roue avec le plan de contact au point I.

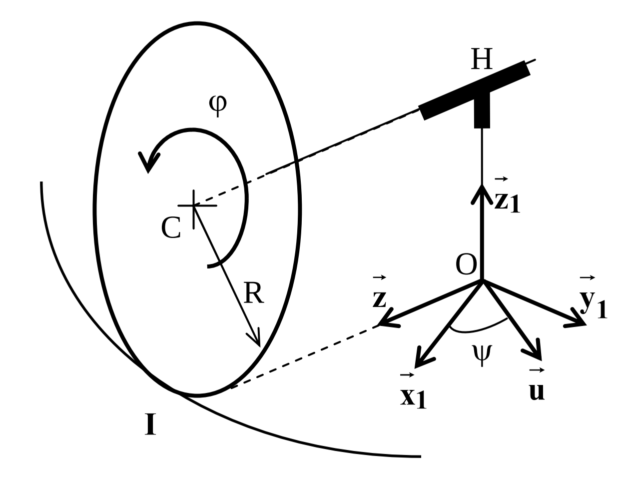


Figure 3.18

Solution :

- la roue **(D)** solidaire de la tige CH, tourne autour CH avec un angle de rotation φ,
- La tige CH = ρ est considérée comme variable, parallèle à l'axe mobile (O, $\vec{z}$),
- La tige liée à l'axe fixe (O, $\vec{z}_1$) par pivot glissant d'axe (H, $\vec{z}_1$), tourne autour de lui par un angle ψ.

La condition de roulement sans glissement:

Le torseur cinématique au centre C de la roue :
Puisque la roue est solidaire de la tige. Il y'a deux rotations en même temps, la première autour de l'axe CH d'un angle φ et la deuxième autour du pivot glissant (H, $\vec{z}_1$) par un angle ψ , le taux de rotation de la roue s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{D/R_1} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{z} + \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Le vecteur vitesse du centre C de la roue, s'exprime :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{HC}}{dt} = \frac{d\rho\vec{z}}{dt}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho \frac{d\vec{z}}{dt}$$

Or, la dérivée d'une base mobile, est :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\Omega}_{(OH)} \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\vec{z}_1 \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\vec{u}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho\dot{\psi}\vec{u}$$

Donc, le torseur cinématique dans le centre C de la roue s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{D/R_1} \\ \vec{V}_{C/R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_1 \\ \dot{\rho}\vec{z} + \rho\dot{\psi}\vec{u} \end{pmatrix}$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, la vitesse du point de contact **I**, s'écrit :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{C/R_1} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{D/R_1}$$

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho\dot{\psi}\vec{u} + R\vec{z}_1 \wedge (\dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\varphi}\vec{z})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{\rho}\vec{z} + (\rho\dot{\psi} + R\dot{\varphi})\vec{u}$$

La condition de roulement sans glissement permet alors d'écrire que cette vitesse est nulle. Nous obtenons alors deux équations scalaires qui sont :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \rho\dot{\psi} + R\dot{\varphi} = 0$$

3.5. Une meule, assimilée à un disque de rayon **r** et de centre O, située dans un plan maintenu vertical, roule sur un chemin circulaire fixe qui est le cercle horizontal de rayon **R** et de centre O_1, comme le montre la Figure 3.19.
L'axe Oz de la meule rencontre en C l'axe O_1z_1 du chemin circulaire. A l'instant initial, le point P de la meule coïncide avec le point P_1 du chemin circulaire.
On utilise un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe, tel que $(O_1, \vec{x}_1)$ passe par A_1 et $(O_1, \vec{z}_1)$ passe par C, et un repère mobile $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, lié à la meule, tel que $(O, \vec{x})$ passe par A et $(O, \vec{z})$ par passe C.

Sachant que la meule tourne dans le chemin circulaire fixe autour de l'axe $(\mathbf{O_1}, \vec{\mathbf{z_1}})$ par un angle $\psi = \left(\overrightarrow{\mathbf{O_1A_1}}, \overrightarrow{\mathbf{O_1P_1}}\right)$ et elle tourne autour de son axe $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{z}})$ par un angle $\varphi = \left(\overrightarrow{\mathbf{OP}}, \overrightarrow{\mathbf{OA}}\right)$ (Figure 3.19).

1- Déterminer le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ de la meule dans le mouvement de R par rapport à R_1?
2- Ecrire les éléments de réduction en O du torseur cinématique dans le mouvement de R par rapport à R_1 ?
3- En déduire la vitesse du point P et écrire la condition de roulement sans glissement.

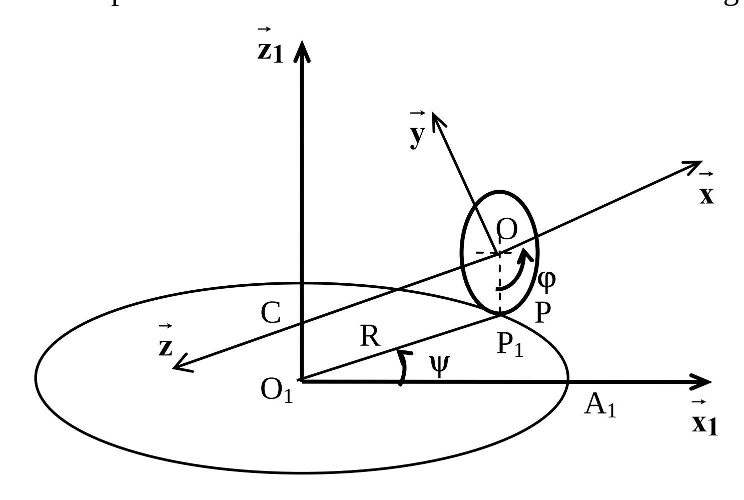


Figure 3.19

Solution :

$R_1(\mathbf{O_1}, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1)$ un repère fixe,

R $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$, lié à la meule, est un repère mobile,

Le taux de rotation de la roue du mouvement de R par rapport à R_1 est :

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \vec{\Omega}_{M/R} + \vec{\Omega}_{M/R_1}$$

Le taux de rotation de la meule M par rapport à R est :

$$\vec{\Omega}_{M/R} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{z} = \dot{\varphi}\vec{z}$$

Le taux de rotation d'entraînement, où le taux de rotation du repère R et la meule M par rapport à R_1, est :

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z} = \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Le vecteur taux de rotation absolu est :

$$\vec{\Omega}_{M/R_1} = \vec{\Omega}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/R_1} = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Le torseur cinématique au centre O de la meule est :

$$[V]_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_O \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{O/R1} = \vec{V}_{O_1} + \overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

$\vec{V}_{O_1} = \vec{0}$ car O_1 point fixe

$$\overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1} = -R\vec{z} \wedge \dot{\psi}\vec{z}_1 = -R\dot{\psi}\vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{O/R_1} = -R\dot{\psi}\vec{x}_2$$

Donc, le torseur cinématique dans le point O est :

$$[V]_O = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_1 \\ \\ -R\dot{\psi}\vec{x}_2 \end{pmatrix}$$

On déduit la vitesse du point P et la condition de roulement sans glissement.

$$\vec{V}_{P/R1} = \vec{V}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

$$\overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1} = -r\vec{y}_2 \wedge (\dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_1) = +r\dot{\varphi}\vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{P/R1} = -R\dot{\psi}\vec{x}_2 + r\dot{\varphi}\vec{x}_2 = \left(-R\dot{\psi} + r\dot{\varphi}\right)\vec{x}_2$$

Donc, la condition de roulement sans glissement de la meule sur le chemin circulaire est :

$$\vec{V}_{P/R1} = \vec{0} \iff -R\dot{\psi} + r\dot{\varphi} = 0$$

3.6. Le repère R(**O**, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) est orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe R_0(**O_0**, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \overrightarrow{z_0}$) dans les conditions suivantes (Figure 3.20) :

a) $\overrightarrow{O_0O} = \beta t\, \vec{y}_0$ où β est un coefficient constant et t désigne le temps.

b) $\left(\vec{x}_0, \vec{x}\right) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante.

c) $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M est mobile par rapport au repère R(**O**, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$), ses coordonnées x, y, z satisfont les conditions suivantes :

$$x = t, \quad y = e^{2t}, \quad z = 0$$

Exprimer les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue du point M dans le repère mobile.

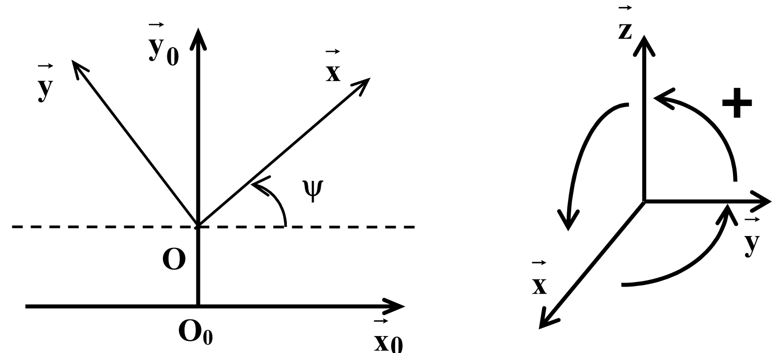


Figure 3.20

Solution :

Les données du problème sont :
Le repère R (**O**, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) mobile (Repère relatif)
Le repère R_0(O_0, $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$) fixe (Repère absolu)

Le vecteur de position d'entraînement de **O** à $\mathbf{O_0}$: $\overrightarrow{O_0O} = \beta t\,\vec{y}_0$

L'angle de rotation de R/R_0 $(\vec{x}_0,\vec{x}) = \psi$ ($\dot{\psi}$ **constante)**

Le vecteur taux de rotation de R/R_0, $\vec{\Omega}_{R/R_0}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_0} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\psi}\vec{z}_0$$

Le point matériel M défini par les coordonnées : **$x = t$, $y = e^{2t}$, $z = 0$ (cm)**
Le vecteur de position relatif du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z} = t\,\vec{x} + e^{2t}\,\vec{y} + 0\,\vec{z}$$

Le vecteur de position absolu du point M est :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM} = \beta t\,\vec{y}_0 + t\,\vec{x} + e^{2t}\,\vec{y}$$

Le vecteur vitesse absolu du point M dans le repère R s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La dérivée du vecteur mobile $\overrightarrow{OM}$ par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0O}}{dt} = \vec{V}_{O/R_0}$$

Donc, la formule du vecteur vitesse absolue du point M, s'exprime :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Avec $\vec{V}_{M/R} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$ la vitesse relative du point M

Et, $\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ le vecteur vitesse d'entraînement du point M

$\vec{V}_{O/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0O}}{dt}$ est la vitesse du point O par rapport à R_0.

Le vecteur vitesse relatif du point M s’écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{x} + 2e^{2t}\vec{y} \quad (cm/sec)$$

$$\vec{V}_{O/R_0} = \frac{d^{R_0}\overrightarrow{O_0O}}{dt} = \beta\vec{y}_0$$

Or : $\vec{y}_0 = \sin\psi\,\vec{x} + \cos\psi\,\vec{y}$

D'où $\vec{V}_{O/R_0}$ qui s'écrit dans le repère mobile :

$$\vec{V}_{O/R_0} = \beta\left(\sin\psi\,\vec{x} + \cos\psi\,\vec{y}\right)$$

Et, $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \psi\vec{z}_0 \wedge (t\vec{x} + e^{2t}\vec{y}) = -\dot{\psi}e^{2t}\,\vec{x} + \dot{\psi}t\,\vec{y} \quad (cm/sec)$

D'où :

$$\vec{V}_e(M) = \left(\beta\sin\psi - \dot{\psi}e^{2t}\right)\vec{x} + \left(\beta\cos\psi + \dot{\psi}t\right)\vec{y} \qquad (cm/sec)$$

Par conséquent, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_0 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_0} = \left(1 + \beta\sin\psi - \dot{\psi}\, e^{2t}\right)\vec{x} + \left(2e^{2t} + \beta\cos\psi + \dot{\psi}\, t\right)\vec{y} \qquad (cm/sec)$$

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_0, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{2R_0}\overrightarrow{O_0M}}{dt^2} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \frac{d^{R_0}\left(\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0}\vec{V}_{O/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

On applique la dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe à la dérivée du vecteur mobile $\overrightarrow{OM}$ par rapport au repère fixe R_0 :

$$\frac{d^{R_0}\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_0}\vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^{R}\vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}$$

La relation du vecteur accélération absolue s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}\right) + \vec{a}_{O/R_0} + \frac{d^{R_0}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

Le vecteur accélération relative du point M, est :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^{R}\vec{V}_{M/R}}{dt} = 4e^{2t}\,\vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}\right) = 2\left(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge (\vec{x} + 2e^{2t}\,\vec{y})\right)$$

$$\vec{a}_C(M) = -4\dot{\psi}\, e^{2t}\,\vec{x} + 2\dot{\psi}\,\vec{y}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

Avec

$$\vec{a}_{O/R_0} = \frac{d^{R_0}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} = \vec{0} \quad (cm/sec^2) \quad (\beta \text{ constante})$$

$$\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0} \quad (\dot{\psi} \text{ constante})$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\dot{\psi}^2 t\,\vec{x} - \dot{\psi}^2 e^{2t}\,\vec{y}$$

Donc, le vecteur accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\dot{\psi}^2 t\,\vec{x} - \dot{\psi}^2 e^{2t}\,\vec{y}$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M)$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = \left(-4\dot{\psi}e^{2t} - \dot{\psi}^2 t\right)\vec{x} + \left(4e^{2t} + 2\dot{\psi} - \dot{\psi}^2 e^{2t}\right)\vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

3.7. Un rectangle ABCD (repère **R** $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mobile) tourne autour d'un axe fixe $(O_1, \vec{z}_1)$ (Repère $\mathbf{R_1}$ $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe) avec un taux de rotation $\vec{\Omega} = \frac{\pi}{2}\vec{z}_1$ (rad/sec).

- Les cotés du rectangle AD = CB = **a** (cm) et AB = CD =**2a** (cm) (Figure 3.21).
- $\overrightarrow{O_1O} = a\,\vec{z}_1$
- $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M est mobile sur le coté AB, ses coordonnées x, y, z satisfont les conditions :

x = 0, y = **a** , z = **a sin (πt/3)** (cm)

t désignant le temps.

Exprimer les vecteurs vitesse et accélération absolues de M dans le repère mobile.

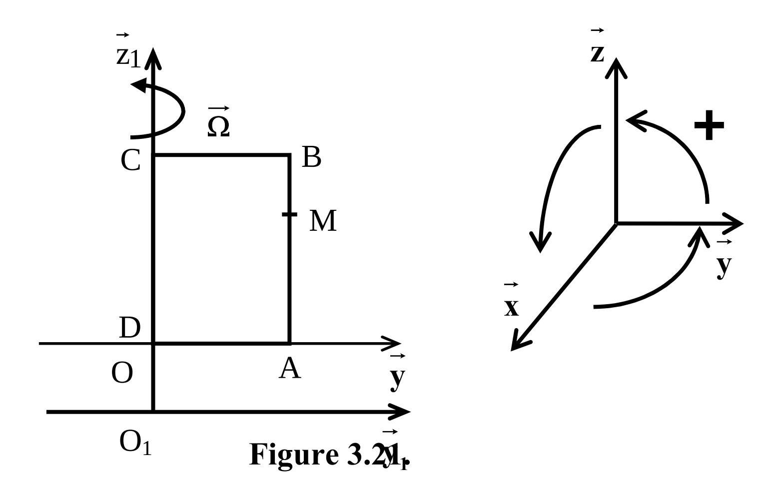


Figure 3.21

Solution :

Les données du problème sont :
Le taux de rotation de R/R_1 est :

$$\vec{\Omega}=\frac{\pi}{2}\vec{z}_1 \text{ (rad/sec).}$$

Repère R mobile (relatif) lié au rectangle ABCD,
Repère R_1 fixe (absolu)

Le point matériel M défini par ses coordonnées :

$$x = \mathbf{0},\ y = \mathbf{a}\ ,\ z = \mathbf{a \sin (\pi t/3)} \text{ (cm)}$$

Le vecteur position relatif du point M :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}=0\vec{x}+a\vec{y}+a\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)t\vec{z}$$

Le vecteur position absolu du point M

$$\overrightarrow{O_1M}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OM}=a\vec{z}_1+a\vec{y}+a\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)t\vec{z}$$

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R :

$$\vec{V}_A(M)=\vec{V}_{M/R_1}=\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt}=\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt}+\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{V}_{M/R}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Avec :

$$\vec{V}_{M/R}=\frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$$, la vitesse relative du point M

Et,

$$\vec{V}_{O/R_1}=\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt}$$, la vitesse du point O par rapport à R_1.

D'où, le vecteur vitesse absolue du point M qui s'écrit :

$$\vec{V}_A(M)=\vec{V}_{M/R_1}=\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt}=\vec{V}_{M/R}+\vec{V}_{O/R_1}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur vitesse relative du point M, s'exprime :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\pi}{3} a \cos\frac{\pi}{3} t \vec{z} \quad (cm/sec)$$

Le vecteur vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Avec : $\vec{V}_{O/R_1} = \dfrac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{0}$

Et $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dfrac{\pi}{2}\vec{z}_1 \wedge (a\vec{y} + a\sin\dfrac{\pi}{3}t\vec{z}) = -\dfrac{\pi}{3} a\, \vec{x} \quad (cm/sec)$

En conséquence, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_1 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = -\frac{\pi}{3} a\vec{x} + \frac{\pi}{3} a\cos\frac{\pi}{3} t\vec{z} \quad (cm/sec)$$

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_1, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{2R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Appliquons la dérivation d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^R\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^R\vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

D'où, l'expression du vecteur accélération absolue qui s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M)$$

On détermine chaque composante de l'accélération absolue.

- Le vecteur accélération relative du point M :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a \sin\frac{\pi}{3} t \vec{z} \quad (cm/sec^2)$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) = \vec{0} \quad \text{Car} \quad \vec{\Omega} \ // \ \vec{V}_{M/R}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

On a : $\vec{a}_{O/R_1} = \vec{0}$

Et $\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0} \quad (\vec{\Omega} : \text{constante})$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{2}\vec{z}_1 \wedge \left(-\frac{\pi}{2} a \vec{x}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 a \vec{y}$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 a \vec{y} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a \sin\frac{\pi}{3} t \vec{z} \quad (cm/sec^2)$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

3.8. Une sphère homogène mobile de rayon **r**, de centre G, est abandonnée sans vitesse initiale au pôle supérieur P d'une sphère homogène plus grande, fixe, de rayon **R**, avec roulement sans glissement (Figure 3.22). La position de la sphère mobile est déterminée par l'angle θ tel que :

$$\theta = (\overrightarrow{\mathbf{Ox}}, \overrightarrow{\mathbf{OG}})$$

La rotation de la sphère mobile autour de son axe de rotation Gz est déterminée par l'angle φ.

1- déterminer le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OG}}$, le vecteur de vitesse $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{G})$ et le vecteur accélération $\vec{\mathbf{a}}(\mathbf{G})$ du centre de graviter G de la sphère mobile par rapport à O ;

2- écrire la condition de roulement sans glissement du point de contact I entre les deux sphères.

3- déterminer le vecteur accélération du point de contact **I**.

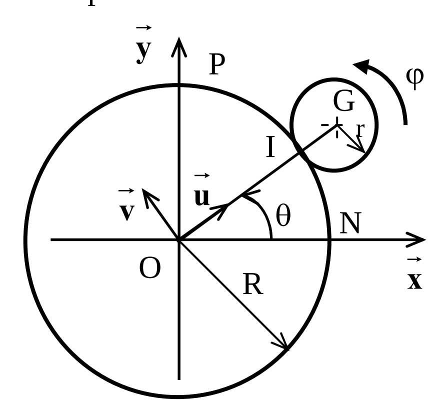


Figure 3.22.

3.9. On considère le système matériel illustré dans la Figure 3.23. Ce système est constitué de :

- 2 barres OA et AG de même longueur **a** et de masses négligeables (solide 1 et 2),
- un disque homogène de masse **m**, de centre G et de rayon ***a*** (solide 3).

La barre OA est liée au repère fixe R_1 par un pivot d'axe vertical $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{z}}_1)$. La barre AG est en mouvement dans un plan perpendiculaire en A à OA grâce à un pivot d'axe $(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{u}})$. Le disque est lié à la barre AG par une liaison pivot $(\mathbf{G}, \vec{\mathbf{z}})$, où $(\mathbf{G}, \vec{\mathbf{z}})$ étant l'axe du disque. Le repère relatif R $(\mathbf{G}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ est lié au disque.

- Ecrire l'expression vectorielle du taux de rotation du disque par rapport à R_1.
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre de masse G du disque.

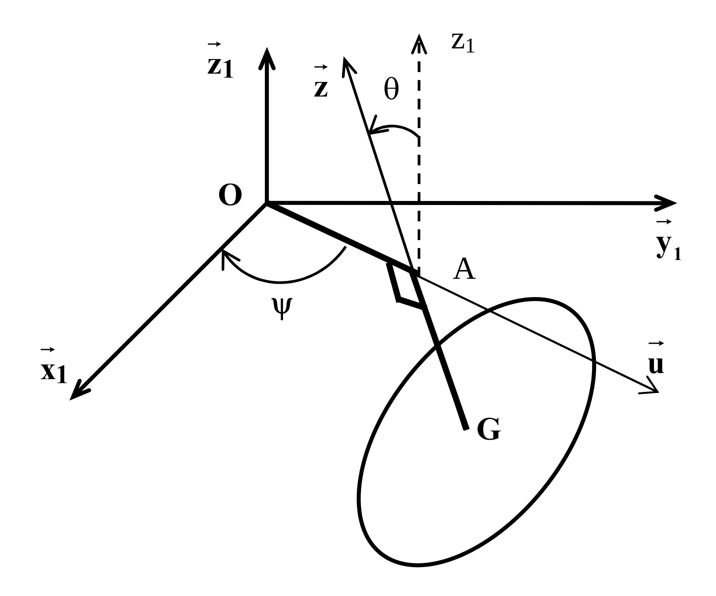


Figure 3.23

3.10. Soit le repère R_1 $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ orthonormé est considéré comme fixe. Le repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé est mobile par rapport à R_1 de manière que l'on ait constamment :

$$\vec{z} = \overrightarrow{z_1} \;;\quad \left(\vec{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = \omega t = \psi$$

t désignant le temps et ω une constante positive.

Un point matériel M est mobile par rapport à R et R_1. On désigne par $\overrightarrow{a_A}(M)$ et $\overrightarrow{v_A}(M)$ respectivement l'accélération et la vitesse de M dans son mouvement par rapport à R_1 et par $\overrightarrow{a_r}(M)$ l'accélération de M dans son mouvement par rapport à R_1. On suppose que dans le mouvement de M par rapport à R_1, on a constamment :

$$z_1 = 0, \qquad \overrightarrow{a_a}(M) = -K^2\,\overrightarrow{OM} + 2\omega\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{v_A}(M)$$

1- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{a_r}(M)$ au moyen du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2- Exprimer les coordonnées de M par rapport au repère R_1 en fonction de t.

3.11. Soient le repère orthonormé direct R_1 $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe et un repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé, direct et mobile par rapport au repère précédent dans les conditions suivantes :

a) $\overrightarrow{O_1O} = r\vec{x}_1$ où **r** est une fonction donnée du temps ;

b) $\left(\vec{x}_1, \vec{x}\right) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps ;

c) $\overrightarrow{z_1} = \vec{z}$.

Un point matériel M mobile par rapport au repère R, ses coordonnées x, y, z satisfont la relation :

$$x = \mathbf{t},\ y = \mathbf{2t},\ z = \mathbf{5t^2}$$

t désignant le temps.

1- que peut- on dire de la trajectoire relative de M ?

2- Exprimer le vecteur vitesse absolue de M dans le repère mobile.
3- Calculer le vecteur accélération absolue de M dans le cas où $\dot{\psi}$ est constant.

3.12. Soit un repère R $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$ orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(\mathbf{O_1}, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1)$ dans les conditions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathbf{O_1O}} = \alpha(\mathbf{t})\vec{\mathbf{y}}_1$, où $\alpha(\mathbf{t})$ est une fonction donnée du temps;

b) $\left(\vec{\mathbf{x}}_0, \vec{\mathbf{x}}\right) = \psi(\mathbf{t})$ où $\psi(\mathbf{t})$ est une fonction donnée du temps;

c) $\vec{\mathbf{z}}_1 = \vec{\mathbf{z}}$.

Un point matériel M est mobile par rapport au repère R, ses coordonnées x, y, z satisfont la relation :

$$\mathbf{x = a \cos 2\omega t, \quad y = a \sin 2\omega t, \quad z = 0}$$

Exprimer les vecteurs vitesse et accélération absolus du point M dans le repère mobile.

Chapitre 4 : CINETIQUE

4.1. INTRODUCTION

La cinétique traite les relations associant les grandeurs cinématiques et la répartition des masses. Ce chapitre, introduit de nouvelles grandeurs cinétiques telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique, la quantité d'accélération, le moment dynamique et l'énergie cinétique.

4.2. QUANTITE DE MOUVEMENT ET MOMENT CINETIQUE

Dans la suite de ce paragraphe on va défini la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un :
- Point matériel
- Ensemble de Points Matériels
- Système matériel continu

4.2.1. Point matériel

Soit $\vec{V}_M$ le vecteur vitesse d'un point M ayant une masse **m**. On appelle quantité de mouvement du point M la grandeur vectorielle : $m\vec{V}_M$

On appelle moment cinétique du point M, le moment par rapport à un point quelconque A de la quantité de mouvement : $\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}_M$

4.2.2. Ensemble de Points Matériels

On appelle quantité de mouvement d'un système de n points matériels M_i de masse m_i la grandeur vectorielle : $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_{M_i}$

On appelle moment cinétique en un point A de l'ensemble des n points matériels M_i la somme des moments par rapport à ce point quantités de mouvement élémentaires $m_i \vec{V}_{M_i}$ soit : $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}_{M_i}$

4.2.3. Système matériel continu

La quantité de mouvement d'un système matériel continu de volume V est :

$$\vec{p} = \int_V \vec{V}_M \, dm(M) \qquad (4.1)$$

Le moment cinétique du système en un point A est :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M \, dm(M) \qquad (4.2)$$

4.3. TORSEUR CINETIQUE

4.3.1. Définition

Par définition, le moment cinétique au point **A** est :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M \, dm(M)$$

Il est alors évident que si on a :

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \int_V \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \wedge \vec{V}_M \, dm(M) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Le moment cinétique obéit donc à la loi du transport des moments, ce qui montre que qu'il est possible de construire un torseur cinétique ayant pour résultante la quantité de mouvement.

Le moment cinétique par rapport au point **A** s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Le torseur cinétique au point **A** s'écrit alors :

$$[C]_A = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \\ \vec{\sigma}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{V}_M \, dm(M) \\ \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M \, dm(M) \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

4.3.2. Calcul de la résultante

Soit O le point origine, la résultante du torseur cinétique où la quantité du mouvement du système peut s'écrire :

$$\vec{p} = \int_V dm \, \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \overrightarrow{OM} \, dm = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\vec{V}_G$$

Où **G** est le centre d'inertie. Le torseur cinétique au centre **A**, s'écrit alors :

$$[C]_A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{mV_G} \\ \vec{\sigma}_A \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

4.3.3. Théorème de Kœnig relatif au moment cinétique

Le référentiel du Kœnig $\mathbf{R_K}$ est le référentiel dont les axes sont issus du centre d'inertie **G** (Figure 4.1) et constamment parallèles à ceux du repère $\mathbf{R_0}$ ($\vec{\Omega}_{R_k/R_0} = \vec{0}$).

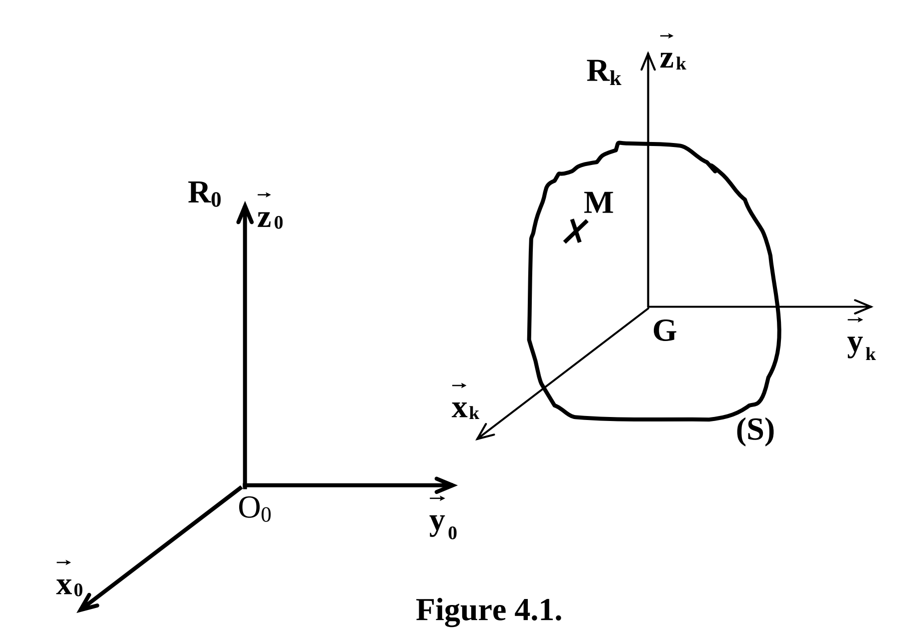


Figure 4.1.

Par définition, le moment cinétique en **G** par rapport à $\mathbf{R_0}$ est :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_k}\right) dm$$

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \left(\int_V \overrightarrow{GM}\, dm\right) \wedge \vec{V}_{G/R_0} + \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{M/R_k}\, dm$$

Or $\int_V \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$, car **G** est le centre d'inertie du système matériel. Et, par définition,

$$\vec{\sigma}_{G/R_K} = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{M/R_k}\, dm$$

On a donc l'égalité :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_K}$$

Le théorème de Kœnig est alors :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_K} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{R_0} \tag{4.5}$$

4.3.4. Moment cinétique d'un solide indéformable en G (centre d'inertie)

Le moment cinétique d'un solide indéformable au centre d'inertie **G**, est :

$$\vec{\sigma}_G = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_M \, dm = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}_G + \overrightarrow{MG} \wedge \vec{\Omega}\right) dm$$

$$\vec{\sigma}_G = \left(\int_V \overrightarrow{GM} \, dm \right) \wedge \vec{V}_G + \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right) dm$$

Or $\int_V \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0}$, car G est le centre d'inertie du système matériel. D'autre part :

$$I_G\left(\vec{\Omega}\right) = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right) dm \qquad (4.6)$$

D'où le moment cinétique d'un solide indéformable qui s'écrit donc :

$$\vec{\sigma}_G = I_G \, \vec{\Omega} \qquad (4.7)$$

4.3.5. Moment cinétique d'un solide indéformable en un point de vitesse nulle

Si le solide est indéformable, nous pouvons utiliser la règle de distribution des vitesses :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M \, dm = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{V}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}\right) dm$$

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}\right) dm = I_A \, \vec{\Omega}$$

Alors, si **A** est un point d'un solide indéformable tel que $\vec{V}_{A \in S} = \vec{0}$, le moment cinétique en **A** de ce solide est :

$$\vec{\sigma}_A = I_A \, \vec{\Omega} \qquad (4.8)$$

Si la rotation a lieu autour d'un fixe (A, $\vec{z}$) et que (A, $\vec{z}$) est un axe principal d'inertie, on a :

$$\vec{\sigma}_A = I_{zz} \, \vec{\Omega} \qquad (4.9)$$

4.4. ÉNERGIE CINETIQUE

4.4.1. Définition

Pour un système matériel continu (S), on appelle énergie cinétique la quantité scalaire exprimée en joules (J) :

$$E_C = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_M^2 \qquad (4.10)$$

4.4.2. Théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique

L'énergie cinétique par rapport à un référentiel R_0 (R_K est le référentiel de Kœnig), par définition est :

$$E_C^{R_0} = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_{M/R_0}^2 = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \left(\vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_K}\right)^2$$

Or, le vecteur vitesse absolue dans le cas de la translation s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_K}$$

D'où

$$E_C^{R_0} = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_{G/R_0}^2 + \int_V dm(M) \left(\vec{V}_{G/R_0}\ \vec{V}_{M/R_K}\right) + \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_{M/R_K}^2$$

$$E_C^{R_0} = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_{G/R_0}^2 + \int_V dm(M) \left(\vec{V}_{G/R_0}\ \vec{V}_{M/R_K}\right) + \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_{M/R_K}^2$$

$$E_C^{R_0} = \frac{1}{2} m\ \vec{V}_{G/R_0}^2 + \vec{V}_{G/R_0} \int_V dm(M) \vec{V}_{M/R_K} + E_C^{R_K}$$

$$E_C^{R_0} = \frac{1}{2} m\ \vec{V}_{G/R_0}^2 + \vec{V}_{G/R_0}\ \frac{d}{dt} \int_V dm(M) \overrightarrow{GM} + E_C^{R_K}$$

Or $\int_V \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$, car **G** est le centre d'inertie du solide. Par conséquent, le théorème de Kœnig est alors :

$$E_C^{R_0} = \frac{1}{2} m\ \vec{V}_{G/R_0}^2 + E_C^{R_K} \qquad (4.11)$$

L'énergie cinétique d'un système (S) par rapport à un référentiel R_0 est égale à l'énergie cinétique de ce système dans son mouvement autour du centre d'inertie G, augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie **G** de la masse totale masse **m.**

4.4.3. L'énergie cinétique d'un solide indéformable

Soit **N** un point d'un solide indéformable, nous pouvons écrire :

$$E_C = \frac{1}{2}\int_V dm(M)\vec{V}_M\left(\vec{V}_N + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{\Omega}\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{V}_N \int_V dm\,\vec{V}_M + \frac{1}{2}\int_V dm\,\vec{V}_M\left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{V}_N\, m\vec{V}_G + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\int_V \overrightarrow{MN} \wedge dm\,\vec{V}_M = \frac{1}{2}\vec{V}_N\, m\vec{V}_G + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\,\vec{\sigma}_N \qquad (4.12)$$

D'où, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{V}_N\, m\vec{V}_G + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\,\vec{\sigma}_N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\Omega}\\ \vec{V}_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\vec{V}_G\\ \vec{\sigma}_N\end{pmatrix} = \frac{1}{2}[V]_N[C]_N \qquad (4.13)$$

Cas particuliers :

* Si **N = G** centre d'inertie (Solide indéformable)

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\, I_G\, \vec{\Omega}$$

Où:

$\frac{1}{2}m\vec{V}_G^2$: est l'énergie cinétique de translation;

Et

$\frac{1}{2}\vec{\Omega}\, I_G\, \vec{\Omega}$: est l'énergie cinétique de rotation.

*** Si le solide a uniquement un mouvement de translation :**

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{V}_G^2$$

*** Si le solide est en rotation sans translation autour d'un axe fixe (O, $\vec{z}$) ;**
Le moment cinétique au point N appartient à l'axe (O, $\vec{z}$), s'écrit :

$$\vec{\sigma}_N = I_N\, \vec{\Omega} \text{ car } \vec{V}_N = \vec{0}$$

Soit :

$$\sigma_N = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xz}\,\Omega \\ I_{yz}\,\Omega \\ I_{zz}\,\Omega \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique est donc :

$$E_C = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}\,\overrightarrow{\sigma_N} = \frac{1}{2} I_{zz}\,\Omega^2$$

4.5. TORSEURS DYNAMIQUE

4.5.1. Définition

Soit $\vec{a}_M$ l'accélération d'un point M telle que :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

On appelle $\vec{a}_M\,dm$ la quantité d'accélération élémentaire du point M, et la quantité $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M\,dm(M)$, le moment dynamique au point A.

Le torseur dynamique en **A** s'écrit :

$$[D]_A = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{a}_M\,dm(M) \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M\,dm(M) \end{pmatrix} \qquad (4.14)$$

Le moment dynamique obéit à la règle du transport des moments :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D} \qquad (4.15)$$

4.5.2. Calcul de la résultante

La résultante (la quantité d'accélération) $\vec{D}$ du torseur dynamique s'écrit :

$$\vec{D} = \int_V dm\,\vec{a}_M = \int_V dm\,\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V dm\,\vec{V}_M = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{V}_G\right)}{dt}$$

Le point **G** est le centre d'inertie. S'il y a conservation de la masse, la résultante $\vec{D}$ est donc égale au produit de la masse par l'accélération du centre d'inertie :

$$\vec{D} = m\,\vec{a}_G \qquad (4.16)$$

4.5.3. Théorème de Kœnig relatif au moment dynamique

Par définition, le moment dynamique en G par rapport à un référentiel R_0 est (R_K est le référentiel de Kœnig):

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{a}_{M/R_0}\, dm = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{a}_{G/R_0} + \vec{a}_{M/R_k}\right) dm$$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \left(\int_V \overrightarrow{GM}\, dm\right) \wedge \vec{a}_{G/R_0} + \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{a}_{M/R_k}\, dm$$

Or $\int_V \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$, car G est le centre d'inertie du système matériel, et, par définition,

$$\vec{\delta}_{G/R_K} = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{a}_{M/R_k}\, dm$$

On a donc l'égalité: $\vec{\delta}_{G/R_0} = \vec{\delta}_{G/R_K}$

Le théorème de Kœnig est alors:

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \vec{\delta}_{G/R_K} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{D}_{R_0} \qquad (4.17)$$

4.5.4. Calcul du moment dynamique

Pour rappel, la dérivée de l'expression suivante $\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\vec{V}_M$ est :

$$\frac{d}{dt}\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\,\vec{V}_M = \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm\vec{V}_M + \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

D'ici, on peut écrire que :

$$\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\,\vec{V}_M - \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm\vec{V}_M$$

D'où, le moment dynamique qui s'écrit :

$$\vec{\delta}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm - \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm\vec{V}_M$$

Donc:

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} - \int_V \left(\vec{V}_M - \vec{V}_A\right) \wedge dm\vec{V}_M$$

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge m\vec{V}_G$$

Le moment dynamique devient alors :

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge m\vec{V}_G \qquad (4.18)$$

- si A est confondu avec le centre d'inertie G, on aura :

$$\vec{\delta}_G = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}$$

- si A est un point géométrique fixe ($\vec{V}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{0}$)

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}$$

EXERCICES RESOLUS

4.1. Pour le disque de l'exercice 3.2 (page 103), déterminer les torseurs cinétique et dynamique au centre C.

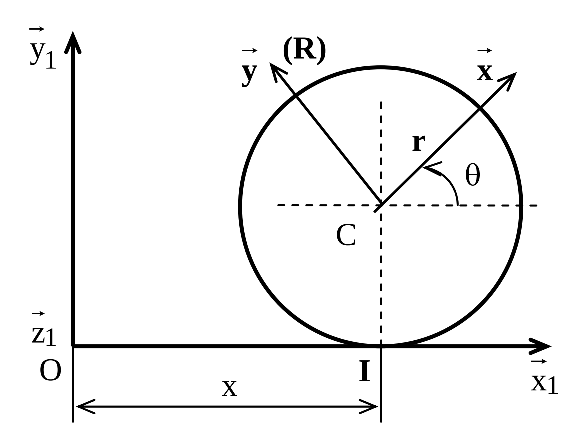


Figure 4.2.

Solution :

1- Le torseur cinématique au centre C (solution de l'exercice 3.2), est :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

Où :

$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \dot{\theta}\vec{z}_1$ est le taux de rotation du disque autour de son axe

$\vec{V}_C = \dot{x}\vec{x}_1$ est le vecteur vitesse de translation du centre C.

2- Le torseur cinétique au centre C, du disque s'écrit :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \\ \vec{\sigma}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{V}_M \, dm(M) \\ \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M \, dm(M) \end{pmatrix}$$

Avec :

$\vec{p}$: La quantité de mouvement au centre C du disque;

$$\vec{p} = m\vec{V}_C = m\dot{x}\vec{x}_1$$

$\vec{\sigma}_C$: Le moment cinétique au centre C du disque. Puisque le disque est en rotation autour de l'axe Cz, il s'écrit :

$$\vec{\sigma}_C = I_{Cz}\vec{\Omega} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\vec{z}_1$$

D'où, le torseur cinétique au centre C qui s'exprime :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} m\dot{x}\vec{x}_1 \\ \\ \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

3- Le torseur dynamique au centre C, du disque s'écrit :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \\ \vec{\delta}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

$\vec{D}$: La quantité d'accélération du centre C du disque;

$$\vec{D} = m\frac{d\vec{V}_G}{dt} = m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = m\ddot{x}\vec{x}_1$$

$\vec{\delta}_C$: Le moment dynamique au centre C du disque. Puisque le disque est en rotation autour de l'axe Cz, il s'écrit :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Cz}\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_1$$

D'où, le torseur dynamique au centre C qui s'exprime :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 \\ \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

4.2. Une bille pleine, de rayon R et de masse m, est placée dans une gouttière inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal (Figure 4.3). La position du centre C est définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathbf{OC}} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{a}\vec{\mathbf{v}}$$

La rotation de la bille autour de Oz_0 est définie par l'angle θ. On demande d'écrire :
1- les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du centre C de la bille;
2- la condition de roulement sans glissement dans les points de contact de la bille avec la gouttière

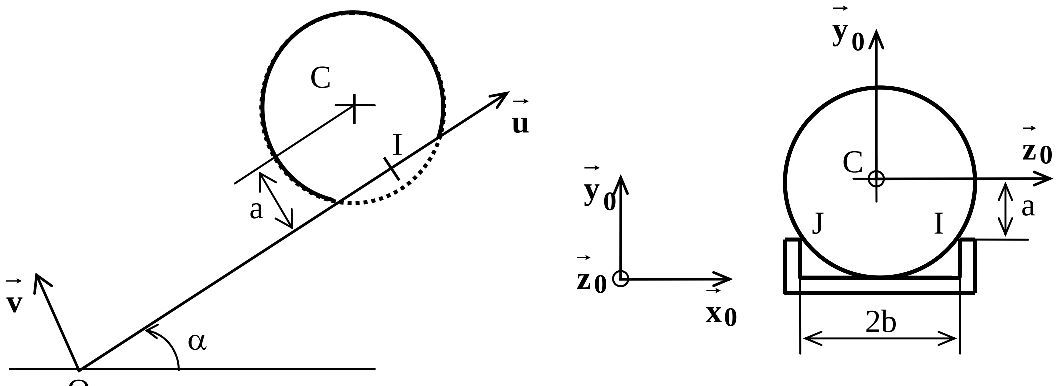


Figure 4.3.

Solution :

La bille est en mouvement hélicoïdal sur la gouttière.
Mouvement de rotation autour de l'axe Cz_0 avec un angle θ ;
Mouvement de translation sur la gouttière par une trajectoire **x** ;

1.1 - Le torseur cinématique au centre C du disque s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \\ \vec{V}_C \end{pmatrix}$$

Avec:
$\vec{\Omega}$: Le vecteur taux de rotation du centre C de la bille autour de l'axe Cz_0;

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

$\vec{V}_C$: Le vecteur vitesse de translation du centre C de la bille par rapport au point O. Il s'obtient par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OC}$ par rapport au repère fixe, où :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d\left(x\vec{u} + a\vec{v}\right)}{dt} = \dot{x}\vec{u}$$

D'où le torseur cinématique au centre C de la bille qui s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \\ \dot{x}\vec{u} \end{pmatrix}$$

1.2- Le torseur cinétique au centre C de la bille est :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \\ \vec{\sigma}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

$\vec{p}$: La quantité de mouvement au centre C de la bille, exprimée par :

$$\vec{p} = m\vec{V}_C = m\dot{x}\vec{u}$$

$\vec{\sigma}_c$: Le moment cinétique de la bille au centre C, il s'écrit :

$$\vec{\sigma}_c = I_{Cz}\vec{\Omega} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\theta}\vec{z}_0$$

Donc :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} m\dot{x}\vec{u} \\ \\ \frac{2}{5}mR^2\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

1.3- Le torseur dynamique de la bille au centre C s'écrit :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \\ \vec{\delta}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

$\vec{D}$: La quantité d'accélération de la bille au centre C. Elle s'obtient par la dérivée de la quantité de mouvement $\vec{p}$;

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = m\ddot{x}\vec{u}$$

$\vec{\delta}_C$: Le moment dynamique au centre C de la bille. Il s'écrit :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Cz}\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} m\ddot{x}\vec{u} \\ \\ \frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

2- la condition de roulement sans glissement de la bille sur la gouttière :

La bille est en contact ponctuel avec la gouttière aux points I et J. la condition de roulement sans glissement, exige que :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_J = \vec{0}$$

Or, la vitesse du point, s'obtient par l'application de la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_C + \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\Omega}$$

D'après la figure 4.3, le vecteur position $\overrightarrow{IC}$, s'écrit :

$$\overrightarrow{IC} = a\vec{v} - b\vec{z}_0$$

D'où :

$$\vec{V}_I = \dot{x}\vec{u} + \left(a\vec{v} - b\vec{z}_0\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 = (\dot{x} + a\dot{\theta})\vec{u}$$

Donc, la condition de roulement sans glissement dans les points de contact de la bille avec la gouttière est :

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

4.3. Un pendule pesant de poids P, de longueur $2l$, est fixé dans le point O par une liaison pivot parfaite (Figure 4.4). A l'instant initial le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position verticale par un angle de rotation θ. On demande d'écrire les torseurs cinématique, cinétique et dynamique au centre G du pendule.

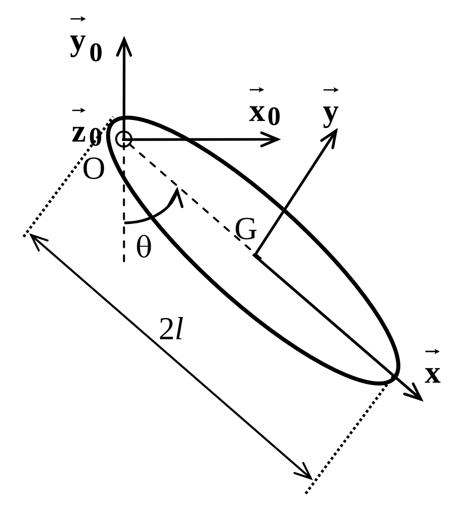


Figure 4.4.

Solution :

Le pendule est en mouvement de rotation autour de l'axe Oz_0 avec un angle θ ;
1- Le torseur cinématique au centre G est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_G \end{pmatrix}$$

Avec:
$\vec{\Omega}$: Le taux de rotation du centre G du pendule autour de l'axe Oz_0;

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

$\vec{V}_G$: La vitesse de rotation du centre G du pendule autour de l'axe Oz_0, elle s'écrit :

$$\vec{V}_G = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{\Omega}$$

Où : $\overrightarrow{GO} = -l\vec{x}$
Donc :

$$\vec{V}_G = -l\vec{x} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 = l\dot{\theta}\vec{y}$$

D'où le torseur cinématique au centre G du pendule est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ l\dot{\theta}\vec{y} \end{pmatrix}$$

2- Le torseur cinétique au centre G du pendule :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_G \end{pmatrix}$$

Où la quantité de mouvement au centre G du pendule est :

$$\vec{p} = m\vec{V}_G = \frac{P}{g}l\dot{\theta}\vec{y}$$

Et son moment cinétique qui s'écrit :

$$\vec{\sigma}_G = I_{Gz}\vec{\Omega} = I_{Gz}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \frac{P}{g} l\dot{\theta}\vec{y} \\ \\ I_{Gz}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

3- Le torseur dynamique en G est :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix}$$

La quantité d'accélération du pendule est :

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{P}{g} d(l\dot{\theta}\vec{y}) = \frac{P}{g}\left(l\ddot{\theta}\vec{y} - l\dot{\theta}\vec{x}\right)$$

Et, le moment dynamique au centre G :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Gz}\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{Gz}\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où, le torseur dynamique qui s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Pl}{g}\left(-\dot{\theta}\vec{x} + \ddot{\theta}\vec{y}\right) \\ \\ I_{Gz}\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4.4. Une plaque rectangulaire homogène, de masse **m**, de largueur a et de longueurs b, tourne autour de l'une de ses diagonales avec un taux de rotation Ω (Figure 4.5). Déterminer le moment cinétique au centre de la plaque.

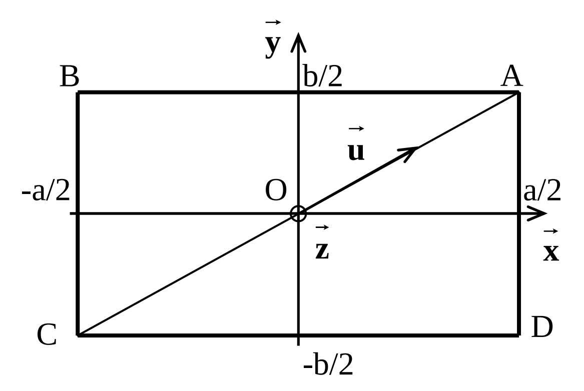


Figure 4.5.

Solution :

La matrice d'inertie au centre O de la plaque s'écrit (exercice 2.6, page 77) :

$$\mathbf{I_O} = \frac{\mathbf{m}}{12}\begin{bmatrix} \mathbf{b}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2) \end{bmatrix}$$

Le taux de rotation par rapport à l'axe de rotation est : $\vec{\Omega} = \Omega\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{u}}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation représenté par la diagonale CA de la plaque, il s'écrit :

$$\vec{\mathbf{u}} = \cos\alpha\,\vec{\mathbf{x}} + \sin\alpha\,\vec{\mathbf{y}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}\,(\mathbf{a}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\vec{\mathbf{y}})$$

D'où :

$$\vec{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}\,(\mathbf{a}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\vec{\mathbf{y}})$$

Puisque la plaque est en mouvement de rotation autour de la diagonale CA, le moment cinétique au centre O de la plaque est :

$$\vec{\sigma}_O = \mathbf{I_O}\,\vec{\Omega} = \sigma_{Ox}\vec{\mathbf{x}} + \sigma_{Oy}\vec{\mathbf{y}} + \sigma_{Oz}\vec{\mathbf{z}}$$

Les composantes σ_{Ox}, σ_{Oy} et σ_{Oz} du moment cinétique en O sont données par la relation matricielle :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Ox} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{Oy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{Oz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{12}}\begin{bmatrix} \mathbf{b}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{a}\Omega}{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}} \\ \dfrac{\mathbf{b}\Omega}{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

En conséquence,

$$\vec{\sigma}_O = \frac{m\Omega}{12\sqrt{a^2+b^2}}\left(ab^2\vec{x} + a^2b\vec{y}\right)$$

Il est évident que les composantes de $\vec{\sigma}_O$ s'expriment :

$$\sigma_{Ox} = \frac{m\Omega ab^2}{12\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sigma_{Oy} = \frac{m\Omega a^2b}{12\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sigma_{Oz} = 0$$

4.5. Une sphère de masse **m**, de centre G, de rayon R, est mobile autour d'un point fixe O de sa surface. Elle roule sans glisser sur un plan horizontal P, P est situé à la distance R du point O, et **I** le point de contact de la sphère avec le plan (P) (Figure 4.6).
1- Déterminer l'axe instantané de rotation de la sphère.
2- Le taux de rotation autour de cet axe étant Ω, déterminer la quantité de mouvement $\vec{p}$.
3- Déterminer le moment cinétique en O. Calculer son module et l'angle qu'il fait avec $\overrightarrow{OG}$.
4- Calculer l'énergie cinétique de la sphère.

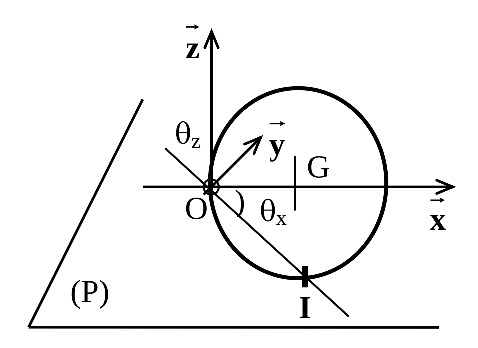


Figure 4.6.

Solution :

1- l'axe instantané de rotation le la sphère :
- Le point O de la sphère est fixe, donc sa vitesse est nulle, d'où :

$$\vec{V}_O = \vec{0}$$

- La sphère est en mouvement de rotation avec roulement sans glissement, donc le point de contact I de la sphère avec le plan (P) a une vitesse nulle, où :

$$\vec{V}_I = \vec{0}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OI}$ formé des points O et I de vitesses nulles est l'axe instantané de rotation de la sphère.

Or,

$$\overrightarrow{OI} = \cos\theta_x \, \vec{x} + \cos\theta_y \, \vec{y} + \cos\theta_z \, \vec{z}$$

Les cosinus directeurs s'obtiennent :

$$\cos\theta_x = \frac{\left|\overrightarrow{OG}\right|}{\left|\overrightarrow{OI}\right|} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_y = 0$$

$$\cos\theta_z = -\frac{\left|\overrightarrow{OG}\right|}{\left|\overrightarrow{OI}\right|} = -\frac{R}{R\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x} + 0\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}$$

2- la quantité de mouvement du centre G de la sphère :

$$\vec{p} = m\vec{V}_G$$

Puisque la sphère est en mouvement de rotation :

$$\vec{V}_G = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{\Omega}$$

Ainsi, le vecteur taux de rotation de la sphère est colinéaire avec l'axe $\overrightarrow{OI}$. Donc, Il est évident que :

$$\vec{\Omega} = \Omega \frac{\overrightarrow{OI}}{\left\|\overrightarrow{OI}\right\|}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x} + 0\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}\right) = \Omega\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{x} - \vec{z}\right)$$

Et $\overrightarrow{GO} = -R\vec{x}$

Donc :

$$\vec{V}_G = -R\vec{x} \wedge \Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x} + 0\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\Omega\,\vec{y}$$

En conséquence,

$$\vec{\mathbf{p}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{mR\Omega}\,\vec{\mathbf{y}}$$

3- Le moment cinétique en O

La sphère est en mouvement de rotation autour de OI, d'où le moment cinétique au point O est :

$$\vec{\sigma}_O = \mathbf{I_O}\vec{\Omega} = \sigma_{Ox}\vec{\mathbf{x}} + \sigma_{Oy}\vec{\mathbf{y}} + \sigma_{Oz}\vec{\mathbf{z}}$$

I_O est la matrice d'inertie au point O. Or, la matrice d'inertie de la sphère au centre G s'écrit (exercice 2.11a):

$$\mathbf{I_G} = \frac{2}{5}\mathbf{mR}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le théorème de Huygens, on obtient I_O :

$$\mathbf{I_O} = \frac{\mathbf{mR}^2}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Les composantes σ_{Ox}, σ_{Oy} et σ_{Oz} du moment cinétique en O sont données par la relation matricielle suivante :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{mR}^2}{5}\frac{\Omega\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\vec{\sigma}_O = \mathbf{mR}^2\frac{\Omega\sqrt{2}}{10}\left(2\vec{\mathbf{x}} - 7\vec{\mathbf{z}}\right)$$

Ou encore la valeur absolue du moment cinétique qui s’écrit :

$$\left\| \vec{\sigma}_O \right\| = mR^2\Omega\frac{\sqrt{106}}{10}$$

4- L'énergie cinétique de la sphère en rotation autour d'un point fixe est :

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_O\vec{\Omega}$$

On remplace $\vec{\sigma}_O$ et $\vec{\Omega}$ par leurs expressions respectives dans la relation ci dessus, on obtient :

$$E_C = \frac{9}{20}mR^2\Omega^2$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

4.6. Deux tiges homogènes OA et AB de même longueur ***a***, de même masse **m** sont mobiles dans un plan Ox, Oy. OA tourne autour de O, on pose $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$.
L'extrémité A de AB est articulée en A à l'extrémité de OA. L'extrémité B est assujettie à glisser sur Ox (Figure 4.7). Calculer le moment cinétique en O et l'énergie cinétique du système.

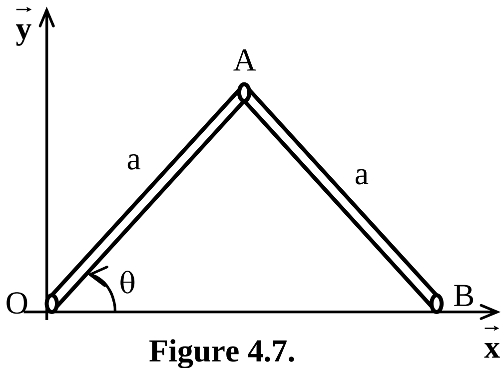


Figure 4.7.

4.7. Reprendre l'exercice 4.3, en remplaçant le pendule par une tige de longueur $2l$ et de masse ***m***.

4.8. Reprendre l'exercice 4.5, en remplaçant la sphère par un disque de rayon R et de masse **m**.

Chapitre 5 : DYNAMIQUE

5.1. INTRODUCTION

La dynamique est l'étude du mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur ces corps. L'objectif de ce chapitre est l'étude des théorèmes généraux régissant la dynamique.

5.2. RAPPEL SUR LE TORSEUR DES FORCES EXTERIEURES

Une force est une action capable de produire ou de modifier un mouvement ou de créer une déformation.
Ces forces sont de types :
- gravitationnelle
- électromagnétique
- de contact….etc

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$[\mathbf{F}]_O = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}} \\ \vec{\mathbf{M}}_O \end{pmatrix}$$

où
$\vec{\mathbf{F}}$ Représente la résultante des forces extérieures appliquées;
$\vec{\mathbf{M}}_O$ le moment de la force $\vec{\mathbf{F}}$ au point O.

Les efforts extérieurs à un système matériel (S) sont les efforts exercés sur (S) par d'autres systèmes extérieurs. Si (S) est soumis à des forces localisées $\vec{\mathbf{F}}_i$ et des couples $\vec{\mathbf{M}}_i$, le torseur des efforts extérieurs exercés sur un solide (S) en un point O, s'écrit :

$$[\mathbf{F}_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_e \\ \vec{\mathbf{M}}_O(\mathbf{F}_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \vec{\mathbf{F}}_i \\ \sum \overrightarrow{\mathbf{OM}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

5.3. RAPPEL DE LA DYNAMIQUE DES PARTICULES

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

- Première loi de Newton

Dans un repère absolu (R_0), une particule π de masse **m** totalement isolée possède une quantité de mouvement constante. On écrit :

$$\vec{\mathbf{p}}_O = \mathbf{m}\vec{\mathbf{V}}_O$$

- Deuxième loi de Newton

Une particule (π) est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant t, ces actions sont représentées par le vecteur force $\vec{\mathbf{F}}$ s'exerçant sur π. On écrit :

$$\vec{\mathbf{p}}_O = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\mathbf{m}\vec{\mathbf{V}}_O\right) = \vec{\mathbf{F}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}_O$$

Où $\vec{\mathbf{a}}_O$ est le vecteur accélération de la particule (π).

- Troisième loi de Newton

Si, à l'instant t, il y a interactions entre deux particules π_1 et π_2, les forces de π_1 sur $\pi_2\left(\vec{\mathbf{F}}_{1/2}\right)$ et de de π_2 sur $\pi_1\left(\vec{\mathbf{F}}_{2/1}\right)$ sont égales et opposées sur la ligne d'action $\pi_1\pi_2$ (Figure 5.1).

$$\vec{\mathbf{F}}_{1/2} = -\vec{\mathbf{F}}_{2/1}$$

C'est le principe de réciprocité où le principe **d'action – réaction**.

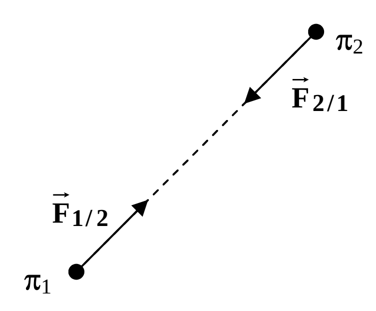


Figure 5.1. *Principe d'action – réaction*

5.4. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Ce principe correspond à la généralisation des lois de Newton pour un système matériel possédant une dimension.
L'égalité des torseurs des efforts extérieurs et dynamique s'écrit :

$$[\mathbf{F_e}]_O = [\mathbf{D}]_O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_e \\ \vec{\mathbf{M}}_O(\mathbf{F_e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{D}} \\ \vec{\delta}_O \end{pmatrix}$$

Il en résulte deux égalités vectorielles qui seront traitées par la suite.

5.4.1. Théorème de la résultante cinétique

L'égalité des résultantes des deux torseurs se traduit par:

$$\vec{F}_e = \vec{D} \Leftrightarrow \vec{F}_e = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G \qquad (5.2)$$

Nous retrouvons la deuxième loi de Newton appliquée à une particule ou la première équation du principe fondamental de la dynamique.

5.4.2. Théorème du moment cinétique

L'égalité des moments des torseurs des efforts extérieurs et dynamique se traduit par :

$$\vec{M}_O(F_e) = \vec{\delta}_O$$

Si l'on écrit les torseurs en un point fixe A par rapport à un repère galiléen, on a la seconde équation du principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit :

$$\vec{M}_A(F_e) = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \qquad (5.3)$$

5.4.3. Solide mobile autour d'un axe fixe Δ

On considère l'axe Δ comme axe principal d'inertie, passant par un point O. Le théorème du moment cinétique en O permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(F_e) \quad \Leftrightarrow \quad I_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{M}_\Delta(F_e)$$

5.5. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

5.5.1. Puissance et travail d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M de vitesse $\vec{V}_M$ à l'instant **t** est:

$$P = \vec{F}(t)\vec{V}(M) \qquad (5.4)$$

L'unité de la puissance est le Watt (1 watt = 1 joule/sec)

Le travail élémentaire accompli pendant l'intervalle de temps **dt** est :

$$dW = Pdt = \vec{F}(t)\vec{V}(M)dt = \vec{F}(t)d\overrightarrow{OM}$$

Le travail accompli entre deux instants t_0 et t_1 est donc :

$$\mathbf{W} = \int \mathbf{dW} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Pdt} \qquad (5.5)$$

L'unité du travail est le joule.

Cas des solides indéformables

Le solide étant indéformable, si A et M sont deux points du solide, la puissance des efforts extérieurs est:

$$\mathbf{P} = \int_D \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{M}}\, \mathbf{d\vec{F}} = \int \left(\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \vec{\Omega}\right) \mathbf{d\vec{F}}$$

$$\mathbf{P} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \int \mathbf{d\vec{F}} + \int \left(\overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \vec{\Omega}\right) \mathbf{d\vec{F}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \int \mathbf{d\vec{F}} + \vec{\Omega} \int \left(\overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \mathbf{d\vec{F}}\right)$$

Finalement, la puissance des efforts extérieurs pour un solide indéformable est le produit du torseur cinématique par le torseur des efforts extérieurs :

$$\mathbf{P} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}\, \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} + \vec{\Omega}\, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{F_e}) = [\mathbf{V}]_{\mathbf{A}} [\mathbf{F_e}]_{\mathbf{A}} \qquad (5.6)$$

5.5.2. Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un système discontinu

L'énergie cinétique d'un système discontinu s'écrit :

$$\mathbf{E_C} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}\, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}^{\,2} \qquad (5.7)$$

On a alors:

$$\frac{\mathbf{dE_C}}{\mathbf{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}\, \vec{\mathbf{v}}\, \frac{\mathbf{d\vec{v}_i}}{\mathbf{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}\, \vec{\mathbf{v}}\, \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}}$$

Connaissant $\mathbf{m\vec{a}_i} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$, il vient :

$$\frac{\mathbf{dE_C}}{\mathbf{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}\, \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}}\, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}\, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_i} = \mathbf{P}$$

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_C}{dt} = P = \left(P_{int} + P_{ext}\right) \qquad (5.8)$$

Cas du solide indéformable (continu)

Dans le cas d'un solide continu, nous avons :

$$E_C = \frac{1}{2}\int_D \vec{V}_M^2 \, dm$$

Si A est un point du solide :

$$\frac{dE_C}{dt} = \int \vec{V}_M \, \vec{a}_M \, dm = \int \left(\vec{V}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}\right)\vec{a}_M \, dm$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \vec{V}_A \int \vec{a}_M \, dm + \vec{\Omega} \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M \, dm = \vec{V}_A \, \vec{D} + \vec{\Omega} \, \vec{\delta}_A = [V]_A [D]_A$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinétique et dynamique. Elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélération absolue, soit :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{ext} \qquad (5.9)$$

Conservation de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire :

$$dE_C = Pdt = dW \qquad (5.10)$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel, on a alors :

$$dW = - dU$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient donc :

$$E_C + U = \text{Constante} \qquad (5.11)$$

La quantité $E_C + U$ est appelée l'énergie mécanique totale du système considéré.

EXERCICES RESOLUS

5.1. Un système est constitué de deux masses **M** et **M’** reliées entre elles par un câble inextensible qui passe sur une poulie de rayon R. la masse **M'** est suspendue dans le vide et la masse **M** glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α (Figure 5.2a). On néglige le frottement du câble sur la poulie. On demande d’écrire :

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie $\vec{\Omega}$ et l'accélération $\vec{a}_G$ des deux corps solides

2- le principe fondamental de la dynamique et déterminer l’accélération du système en deux cas :

a) La masse de la poulie est négligeable ;

b) La masse de la poulie est égale à **m** ;

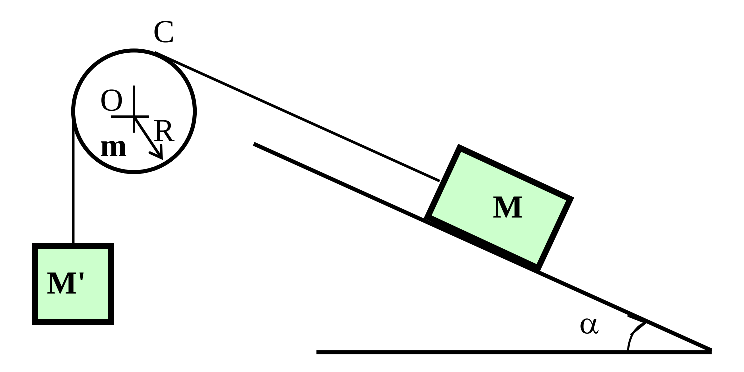


Figure 5.2a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 5.2a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans les Figures 5.2b, 5.2c et 5.2d.

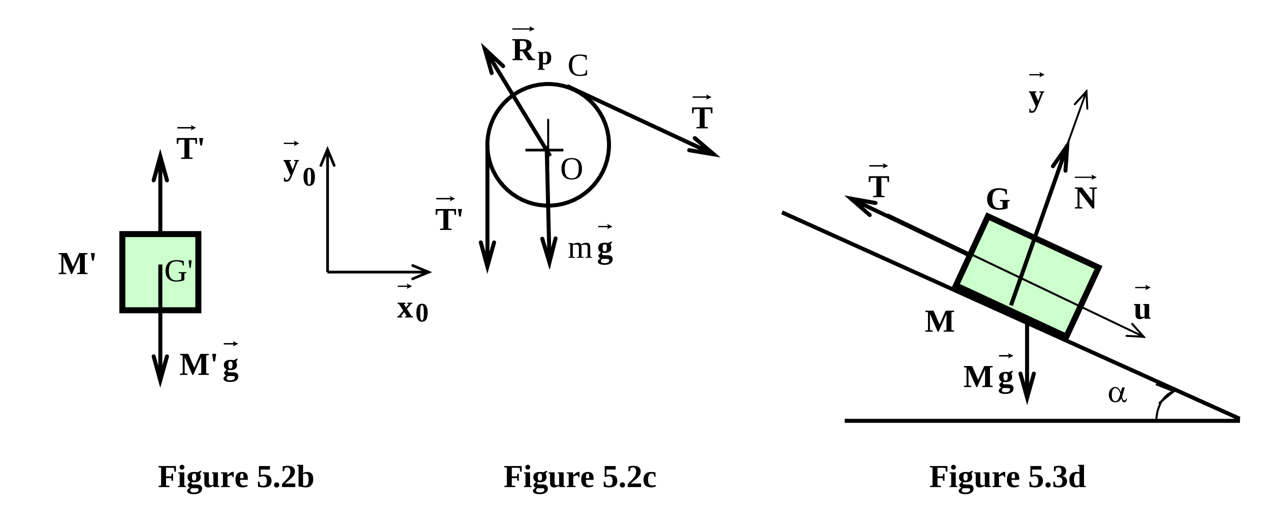


Figure 5.2b **Figure 5.2c** **Figure 5.3d**

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie $\vec{\Omega}$ et l'accélération $\vec{a}_G$ des deux corps solides

Le vecteur vitesse du point de contact C entre le câble et la poulie s'écrit (Figure 5.2c) :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \overrightarrow{CO} \wedge \Omega \vec{z}_0 = -R\vec{v} \wedge \Omega \vec{z}_0 = -R\Omega\, \vec{u}$$

Donc, le vecteur accélération de ce point est la dérivée de $\vec{V}_C$:

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

Or, comme le câble est inextensible, et, il n'y a pas de glissement entre le câble et la poulie, les deux masses seront en mouvement de translation. Par conséquent, l'accélération des masses **M** et **M'** est égale à l'accélération du point C de la poulie, où :

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

2 - Le principe fondamental de la dynamique et l'accélération du système**;**

a- La masse de la poulie est négligeable ;

- Le principe fondamental appliqué à la masse M' (Figure 5.2b)

Le torseur dynamique au centre **G'** du corps solide de masse **M'** s'écrit :

$$[D]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_{G'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M' a_{G'}\, \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

Et, le torseur des forces extérieures au centre **G'**, s'obtient :

$$[F_e]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{F}_{ex} \\ \vec{M}_{G'}(F) \end{pmatrix}_{G'} = \begin{pmatrix} (T' - M'g)\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_{G'} = [F_e]_{G'}$), permet d'écrire :

$$T' - M'g = M' a_G \Leftrightarrow T' = M' a_G + M'g$$

- Le principe fondamental appliqué à la masse M (Figure 5.2d)

Le torseur dynamique au centre **G** du corps solide de masse **M** s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M a_G\, \vec{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre **G**, s'obtient :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{F_e} \\ \overrightarrow{M_G}(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Mg\sin\alpha - T)\vec{u} + (R - Mg\cos\alpha)\vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_G = [F_e]_G$), permet d'écrire :

$$Mg\sin\alpha - T = Ma_G \Leftrightarrow T = -Ma_G + Mg\sin\alpha$$

L'accélération du système a_G ***:***

Puisque le frottement est négligeable dans la poulie, la tension dans le câble reste constante, on écrit :

T = T',

On remplace les tensions **T** et **T'** par leurs expressions respectives dans la relation ci dessus, on obtient l'accélération du système **:**

$$a_G = \frac{Mg\sin\alpha - M'g}{M + M'}$$

b- La masse de la poulie est égale à m ;

- Le principe fondamental appliqué à la poulie de masse* m *(Figure 5.2c)

On écrit le torseur dynamique au centre O de la poulie :

$$[D]_O = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = I_{Oz}\frac{d\Omega}{dt}\vec{z}_0 = \frac{mR^2}{2}\frac{d\Omega}{dt}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre O de la poulie, s'écrit :

$$[F_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{F_e} \\ \overrightarrow{M_O}(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R}_p - m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T'} \\ (-RT + RT')\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

L'égalité des moments des deux torseurs de la poulie, donne :

$$\frac{mR^2}{2}\frac{d\Omega}{dt} = -RT + RT'$$

Or:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

Ou encore :

$$-\frac{m}{2}a_G = T' - T$$

Cette équation nous permet d'obtenir l'accélération du système $\mathbf{a_G}$:

$$a_G = \frac{Mg\sin\alpha - M'g}{M + M' + \frac{m}{2}}$$

Le même résultat obtenu pour $\mathbf{a_G}$ si $\mathbf{m = 0}$.

5.2. Un cylindre plein homogène de poids **P**, et de rayon **r**, est posé sur un plan incliné avec un angle α (Figure 5.3a). Il se déplace avec un couple moteur ($-\Gamma\vec{z}$) et un taux de rotation ($-\Omega\vec{z}$) (Ω constante). Le coefficient de frottement du cylindre et le plan incliné étant f_s.

1- Ecrire les torseurs cinématique, cinétique, dynamique et les forces extérieures dans le centre C du cylindre

2- Ecrire la condition pour que le cylindre monte le plan incliné sans glissement.

3- Déterminer l'énergie cinétique du cylindre.

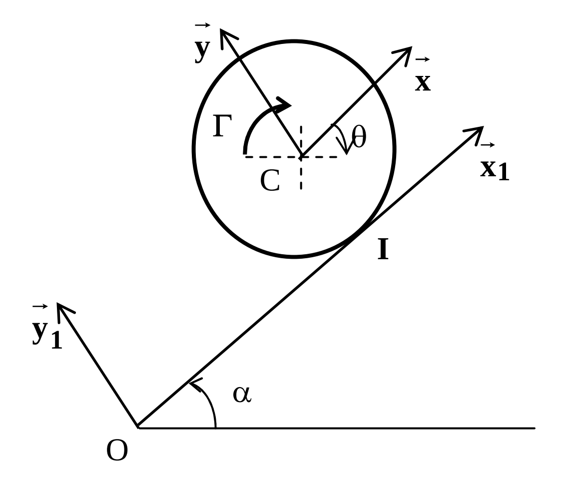


Figure 5.3a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 5.3a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 5.3b.

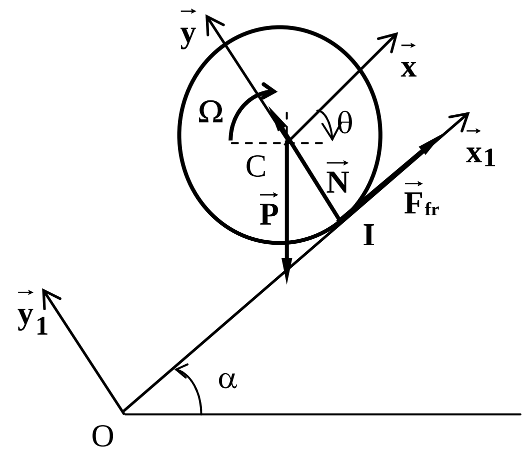


Figure 5.3b

Le cylindre est en mouvement hélicoïdal :
- une rotation avec un taux de rotation **Ω** dans le sens des aiguillés d'une montre;
- une translation d'une trajectoire **x,** du point O jusqu'au point **I**.

1.1- Le torseur cinématique au centre C, du cylindre :
Le taux de rotation du centre C du cylindre s'écrit :

$$\vec{\Omega} = -\,\Omega\vec{z}$$

$\vec{\Omega}$ positif lors de la montée

La vitesse de translation du centre C du cylindre par rapport au repère R_1 est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{x}_1 + r\vec{y}_1\right) = \dot{x}\vec{x}_1$$

D'où le torseur cinématique au centre C du disque qui s'exprime :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} -\Omega\vec{z} \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

1.2- Le torseur cinétique au centre C, du cylindre
La quantité de mouvement au centre C du cylindre est :

$$\vec{p} = m\vec{V}_G = \frac{P}{g}\vec{V}_C = \frac{P}{g}\dot{x}\vec{x}_1$$

Le moment cinétique au centre C du cylindre,

$$\vec{\sigma}_c = I_{Cz}\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\Omega\vec{z}$$

D'où, Le torseur cinétique au centre C qui s'exprime :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} \frac{P}{g}\dot{x}\vec{x}_1 \\ -\frac{P}{2g}r^2\Omega\vec{z} \end{pmatrix}$$

1.3- Le torseur dynamique au centre C, du cylindre

La quantité d'accélération du centre C du cylindre est :

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{P}{g}\ddot{x}\vec{x}_1 = \vec{0} \quad \text{car } \ddot{x} = 0$$

Le moment dynamique au centre C du cylindre :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = -\frac{P}{2g}r^2\dot{\Omega}\vec{z}_1 = \vec{0} \quad \text{car } \dot{\Omega} = 0$$

Du fait de la condition de roulement sans glissement, le moment dynamique en C est donc nul.

1.4 - Principe fondamental de la dynamique

De la figure 5.3b, on écrit le torseur des efforts extérieurs appliqués au centre C du cylindre:

$$[F_e]_C = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_C(F_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-(m+M)g\sin\alpha + F_{fr}\right)\vec{x} + \left(-(m+M)g\cos\alpha + N\right)\vec{y} \\ (-\Gamma + rF_{fr})\vec{z} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique ($[D]_G = [F_e]_G$), nous permet d'écrire trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -(m+M)g\sin\alpha + F_{fr} = 0 \\ -(m+M)g\cos\alpha + N = 0 \\ -\Gamma + rF_{fr} = 0 \end{cases}$$

2- la condition pour que le cylindre monte le plan incliné sans glissement

Dans le cas du roulement sans glissement, la loi de coulomb s'écrit :

$$F_{fr} \le f_s N$$

Ceci implique, avec les deux premières équations données par le principe fondamental, une première condition sur le coefficient de frottement et l'inclinaison :

$$\mathbf{tg\alpha \le f_s}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le cylindre ne pourra en aucun cas monter sans glisser.

La dernière équation du principe fondamental nous permet d'écrire une condition sur le couple exercé :

$$\Gamma \le rF_{fr} \Leftrightarrow \Gamma \le f_s r(m+M)g\cos\alpha$$

On constate que la montée est possible sans glissement si :
- le coefficient de frottement est assez grand (adhérence suffisante)
- le véhicule est suffisamment lourd
- le couple Γ n'est pas très important.

3- L'énergie cinétique du cylindre

L'énergie cinétique du cylindre au centre C s'exprime :

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\vec{\sigma}_C + \frac{1}{2}\vec{V}_C\vec{p} = \frac{1}{2}[V]_C[C]_C$$

On obtient :

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\Omega^2\right) + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\frac{P}{g}r^2\Omega^2$$

5.3. Pour le pendule de l'exercice 4.3. page 136 (Figure 5.4a). On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisant le :
- principe fondamental de la dynamique ;
- théorème de l'énergie cinétique.

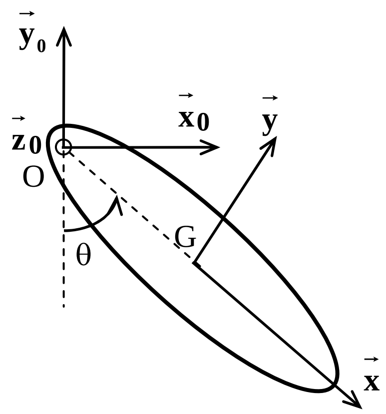


Figure 5.4a

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 5.4a par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 5.4b.

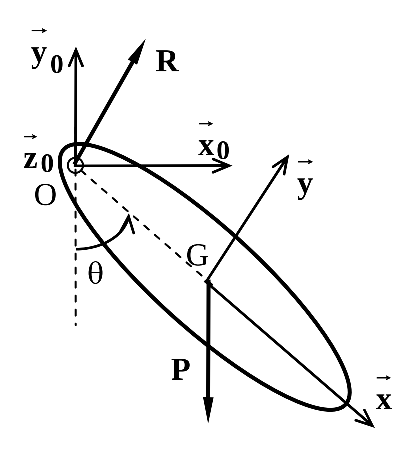


Figure 5.4b

$$\vec{R} = R_x\,\vec{x} + R_y\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{OG} = L\vec{x}$$

1. Les résultats trouvés dans l'exercice 4.3 sont :

1.1- Le torseur cinématique au centre G, du pendule est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \\ l\dot{\theta}\vec{y} \end{pmatrix}$$

1.2- Le torseur cinétique au centre G du pendule :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \\ \vec{\sigma}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{P}{g} l\dot{\theta}\vec{y} \\ \\ I_{Gz}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

1.3- Le torseur dynamique au centre G du pendule est :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Pl}{g}\left(\ddot{\theta}\vec{y} - \dot{\theta}\vec{x}\right) \\ I_{Gz}\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

A - L'équation du mouvement par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique;

De la figure 5.4b, on écrit le torseur des forces extérieures au centre G du pendule :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} (R_x + P\cos\alpha)\vec{x} + (R_y - P\sin\alpha)\vec{y} \\ -R_y l\vec{z} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique ($[D]_G = [F_e]_G$) donne trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -\dfrac{P}{g} l^2 \dot{\theta}^2 = R_x + P\cos\theta & (1) \\ \dfrac{P}{g} l\ddot{\theta} = R_y - P\sin\theta & (2) \\ I_G\ddot{\theta} = -lR_y & (3) \end{cases}$$

On remplace R_y de l'équation (3) dans l'équation (2), **on obtient l'équation du mouvement en $\theta(t)$:**

$$\left(I_G + \frac{P}{g} l^2\right)\ddot{\theta} + Pl\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

La solution de cette équation permet de calculer R_x et R_y.

B- L'équation du mouvement par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique :

Le pendule étant un solide indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2}[V]_G[C]_G = \frac{1}{2}\vec{V}_G\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\vec{\sigma}_G = \frac{1}{2}\left(I_G + \frac{P}{g} l^2\right)\dot{\theta}^2$$

La dérivée de l'énergie cinétique est donc :

$$\frac{dE_C}{dt} = \left(I_G + \frac{P}{g} l^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures s'écrit :

$$P_{ext} = [V]_G[F_e]_G = \vec{V}_G.\vec{F}_e + \vec{\Omega}.\vec{M}_0(F)$$

La puissance de la réaction R en O est :

$$P_{ext}(R) = [V]_O[F_e]_O = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La puissance du poids P est :

$$\mathbf{P_{ext}\,(P) = [V]_G\,[F_e]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \\ l\dot{\theta}\vec{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{P} \\ \\ 0 \end{pmatrix} = -\,Pl\dot{\theta}\sin\theta}$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique, s'écrit :

$$\mathbf{\frac{dE_C}{dt} = P_{ext}}$$

$$\mathbf{\frac{dE_C}{dt} = \left(I_G + \frac{P}{g}l^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\,Pl\sin\theta\,\dot{\theta} \Leftrightarrow \left(I_G + \frac{P}{g}l^2\right)\ddot{\theta} = -\,Pl\sin\theta}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \left(I_G + \frac{P}{g}l^2\right)\ddot{\theta} + Pl\sin\theta = 0 \qquad (5)}$$

C’est l'équation du mouvement obtenue par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique qui est similaire à l’équation (4) obtenue par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique.

Puisque le système est conservatif, nous pouvons utiliser la conservation d'énergie :

Le potentiel U du poids P peut être calculé à partir de la relation :

dW = -P dz = -dU

W = mg (z_1 –z_2) = P (z_1 –z_2)

U = - Plcos θ + const

$$\mathbf{E_C + U = \frac{1}{2}\left(I_G + ml^2\right)\dot{\theta}^2 - Pl\cos\theta = const.}$$

Cette équation est une intégrale première de l’équation **(5)**.
Dans la position initiale θ **= 0** **const = Pl**

Le taux de rotation est calculé comme suit :

$$\dot{\theta}^2 = \mathbf{\frac{2P(1+\cos\theta)}{\left(I_G + ml^2\right)}}$$

Cette équation est une intégrale première de l'équation obtenue précédemment en (5).

5.4. Un demi disque de rayon **r**, de masse m et de centre d'inertie G peut osciller sans glissement au point de contact **I**, avec un angle θ, dans le plan fixe R_0 (O_0, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$). Le repère R (C, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0$) est lié au solide tel que $\overrightarrow{GC} = \lambda\vec{u}$ (Figure 5.5a).

- On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisons le théorème de l'énergie cinétique.

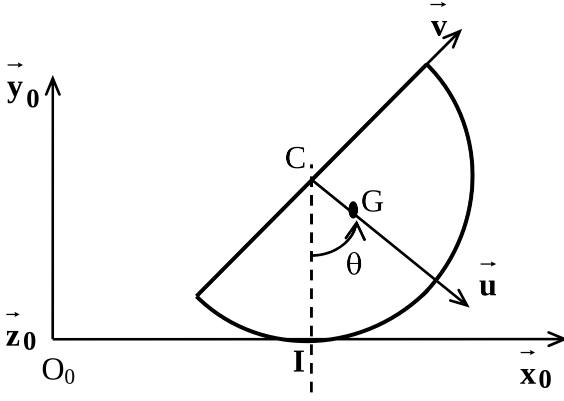


Figure 5.5a

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 5.5a par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 5.5b.

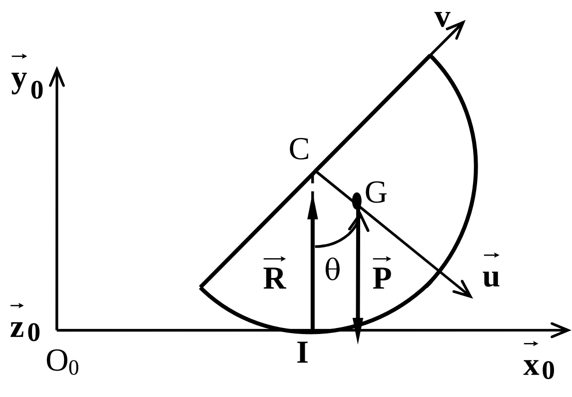


Figure 5.5b

1- Le torseur cinématique dans le centre G du demi disque :

Sachant que le demi disque oscille avec un angle θ, donc le vecteur taux de rotation du demi disque s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

Et, la vitesse du centre G, s'obtient par la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable :

$$\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}$$

Or,

$\vec{V}_I = \vec{0}$, car il y a oscillation sans glissement.

Et,

$$\vec{GI} = \vec{GC} + \vec{CI} = -\lambda\vec{u} - R\vec{y}_0$$

Donc,

$$\vec{V}_G = (-\lambda\vec{u} - R\vec{y}_0) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 = \lambda\dot{\theta}\vec{v} - R\dot{\theta}\vec{x}_0$$

Avec :

$$\vec{u} = \sin\theta\,\vec{x}_0 - \cos\theta\,\vec{y}_0$$
$$\vec{v} = \cos\theta\,\vec{x}_0 + \sin\theta\,\vec{y}_0$$

D'où :

$$\vec{V}_G = (\lambda\cos\theta - R)\dot{\theta}\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0$$

Donc, le torseur cinématique au centre G, est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \\ \vec{V}_G = (\lambda\cos\theta - R)\dot{\theta}\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0 \end{pmatrix}$$

2- le torseur cinétique au centre G du demi disque :

La quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m\vec{V}_G = \frac{P}{g}(\lambda\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta})\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0$$

Et, le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_G = I_G\dot{\theta}\vec{z}_0$$

Où I_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, $\vec{z}_0$)

D'où, le torseur cinétique au centre G est :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} = \frac{P}{g}(\lambda\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta})\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0 \\ \vec{\sigma}_G = I_{Gz}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Puisque, le solide étant indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2}[V]_G[C]_G = \frac{1}{2}\vec{V}_G\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\vec{\sigma}_G$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}(\lambda\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta})\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0\right)\left((\lambda\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta})\vec{x}_0 + \lambda\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{y}_0\right) + \frac{1}{2}\dot{\theta}\vec{z}_0\left(I_{Gz}\dot{\theta}\vec{z}_0\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\left(\lambda\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}\right)^2 + \left(\lambda\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right) + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\lambda^2 - 2\frac{P}{g}\lambda R\cos\theta + \frac{P}{g}R^2 + I_{Gz}\right)\dot{\theta}^2$$

$$P_{ext} = \frac{dE_C}{dt}$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \left(\frac{P}{g}\lambda^2 - 2\frac{P}{g}\lambda R\cos\theta + \frac{P}{g}R^2 + I_{Gz}\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{P}{g}\lambda R\sin\theta\,\dot{\theta}^3$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures (figure 5.5b), s'écrit :

$$P_{ext} = [V]_G[F_e]_G = \vec{V}_G.\vec{F}_e + \vec{\Omega}.\vec{M}_0(F)$$

La puissance de la réaction R est :

$$P_{ext}(R) = [V]_I[F_e]_I = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Comme il n'y a pas de glissement au point **I,** la puissance du poids P est :

$$P_{ext}(P) = [V]_G[F_e]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -P\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda P\dot{\theta}\sin\theta$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne alors :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{ext} \Leftrightarrow \left(\frac{P}{g}\lambda^2 - 2\frac{P}{g}\lambda R\cos\theta + \frac{P}{g}R^2 + I_{Gz} \right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{P}{g}\lambda R\sin\theta\,\dot{\theta}^3 = -\lambda P\dot{\theta}\sin\theta$$

Donc, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{P}{g}\lambda^2 - 2\frac{P}{g}\lambda R\cos\theta + \frac{P}{g}R^2 + I_{Gz} \right)\ddot{\theta} + \frac{P}{g}\lambda R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \lambda P\sin\theta = 0$$

Où

$$\left(m\lambda^2 - 2m\lambda R\cos\theta + mR^2 + I_{Gz} \right)\ddot{\theta} + m\lambda R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + mg\lambda\sin\theta = 0$$

C’est l’équation du mouvement du demi disque de rayon **r**.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

5.5. Reprendre l'exercice 5.1, si la masse **M** glisse sur le plan incliné avec un coefficient de frottement f_{s1}.

5.6. Reprendre l'exercice 5.1, si le coefficient de frottement du câble sur la poulie égale à f_{s2}.

5.7. Pour le corps solide de l’exercice 4.1, écrire le principe fondamental de la dynamique.

5.8. Pour le corps solide de l’exercice 4.2,
- écrire le torseur des forces extérieures
- écrire le principe fondamental de la dynamique pour les deux cas suivants :
    Roulement sans glissement
    Roulement avec glissement.

Bibliographie

Combarnous M., Desjardins D., Bacon C., "Mécaniques des solides – Cours et Exercices corrigés", 2eme édition, Dunod, 199p.

DELANETTE M., DUBOIS M., " Mécanique théorique et appliquée", Librairie de la grave, Paris, 1986.

Ferdinand P. Beer , "Mécanique à l'usage des l'ingénieurs - STATIQUE", Edition Russell.

Hamzaoui N., Mécanique Rationnelle (Module TEC005), polycopie, USTHB, 1986, 90p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Dynamics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 608p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Statics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 607p.

MURAY R. SPIEGEL, "Mécanique générale - Théorie et application", Editions série schaum, 367p.

Tahar HANI, "Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours ", Office des publications Universitaires, 1983, 386p.

STARJINSKI, "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou), 479p

TOUT LE MONDE, " Notions de mécanique statique et de résistance des matériaux", Tome 1, Editions TECHNIP, 402p.

مـ ـيشرسكي: "مسـ ـائل في الميكانيـ ـك". دار مير لنشر ، موسكو، 821ص.

جوزيف ف. شيللي: "الميكانيكا الهندسية - أستاتيكا". دار ماكجروهيل للنشر، لندن.

تـ ـارج: "الميكانيـ ـكا". دار مير لنشر ، موسكو، 642ص